Lösningsförslag till Kontrollskrivning 2 i SF1612 Matematik baskurs
19 september 2007 kl 10.15-11.15

1. **Finns det någon konstant term i utvecklingen av** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x^2}{3}\right)^9$**?** **Bestäm i så fall denna och ge svaret på formen** p/q**, där** p **och** q **är heltal och bråket är förkortat så långt som möjligt.**

Lösning: Enligt binomialsatsen gäller att

$$\left(\frac{2}{x} - \frac{x^2}{3}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{2}{x}\right)^{9-k} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^k,$$

och vi ser att om och endast om $k = 3$ får vi en term som är oberoende av x. Denna term är

$$\binom{9}{3} \left(\frac{2}{x}\right)^6 \left(-\frac{x^2}{3}\right)^3 = -\frac{2^8 \cdot 7}{3^2} = -\frac{1792}{9}.$$

Svar: $-\frac{1792}{9}$

2. **Avgör om funktionen** $f(x) = e^{\sqrt{2x+3}}$ **är inverterbar. Bestäm i så fall inversen och ange inversens definitionsmängd och värdemängd.**

Lösning:
Definitionsmängden till f, $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \geq -3/2\}$.
Värdemänden till f, $V_f = \{y \in \mathbf{R} : y \geq 1\}$.
För $x \geq -3/2$ och $y \geq 1$ gäller att

$$y = e^{\sqrt{2x+3}} \Leftrightarrow \ln y = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow (\ln y)^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow \frac{(\ln y)^2 - 3}{2} = x.$$

Vi ser alltså att f är inverterbar och att inversen ges av $f^{-1}(y) = \frac{(\ln y)^2-3}{2}$, eller ekvivalent $f^{-1}(x) = \frac{(\ln x)^2-3}{2}$. Vidare får vi för inversens definitionsmängd, $D_{f^{-1}}$, och värdemängd, $V_{f^{-1}}$, att
$D_{f^{-1}} = V_f = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$.
$V_{f^{-1}} = D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \geq -3/2\}$.
Svar: $f^{-1}(x) = \frac{(\ln x)^2-3}{2}$ och $D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ och $V_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x \geq -3/2\}$.

3. **Finn alla reella tal** x **som löser ekvationen** $\ln(x+1)+\ln(x+4)+\ln 6 = \ln 24$**.**

Lösning: Vi ser först att ekvationen bara är väldefinierad för $x > -1$. För sådana x gäller enligt loglagarna att

$$\ln(x+1) + \ln(x+4) + \ln 6 = \ln 24 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 4 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Svar: $x = 0$