Lösningar till Kontrollskrivning 3 i SF1612 Matematik baskurs
28 september 2007 kl 13.15-14.30

1. **Om** $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **– vilka värden kan då** $\cos x$ **anta?**

Lösning: Vi har att $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff 2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$ eller $2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + n2\pi$ (n godtyckligt heltal).

Vi har alltså två möjligheter:

ANTINGEN är $2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$ (n godtyckligt heltal), och i så fall ser vi att $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$ (n godtyckligt heltal) och följaktligen $\cos x = \pm 1/2$,

ELLER OCKSÅ är $2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + n2\pi$ (n godtyckligt heltal), och i så fall ser vi att $x = -\pi/2 + n\pi$ (n godtyckligt heltal) och följaktligen $\cos x = 0$.

Vi ser att de värden $\cos x$ kan anta är 0 och 1/2 och $-1/2$.

SVar: De värden $\cos x$ kan anta är 0 och 1/2 och $-1/2$.

2. **Bevisa med hjälp av induktion att** $7^n + 5$ **är jämnt delbart med** 6 **för alla heltal** $n \geq 1$**.**

Lösning: Steg 1, bassteget. Om $n = 1$ gäller att $7^n + 5 = 7 + 5 = 12$ vilket uppenbart är jämnt delbart med 6.

Steg 2, induktionssteget. Anta att $7^p + 5$ är jämnt delbart med 6 för något heltal $p \geq 1$. I så fall gäller att $7^{p+1} + 5 = 7(7^p + 5) - 30$ vilket då också måste vara jämnt delbart med 6 eftersom den sista termen, 30, uppenbart är det och i den första termen är parentesen det enligt vårt antagande. Vi har alltså visat i detta steg att OM $7^p + 5$ är jämnt delbart med 6 för något p SÅ MÅSTE OCKSÅ $7^{p+1} + 5$ vara jämnt delbart med 6.

Slutsats: Det följer att $7^n + 5$ är jämnt delbart med 6 för alla heltal $n \geq 1$.

3. **Beräkna följande. OBS: endast svar krävs! På uppgifterna C och D ska svaret ges på rektangulär form (alltså inte polär form).**

A. $\arctan(\tan\frac{7\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$

B. $\cos(\arcsin\frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{12} = 4096$

D. $\frac{5-3i}{10-4i} = \frac{31}{58} - i\frac{5}{58}$