

Lösningsförslag till Lappskrivning 3 i 5B1121 Matematik baskurs
5 oktober 2005 kl 10.15-11.15

1. **Finn alla reella tal x som uppfyller att $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.**

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ gäller om och endast om $2x + \pi/6 = \pi/6 + n2\pi$ eller $2x + \pi/6 = 5\pi/6 + n2\pi$, n heltal. Detta i sin tur gäller om och endast om $2x = n2\pi$ eller $2x = 4\pi/6 + n2\pi$, n heltal, vilket är ekvivalent med att $x = n\pi$ eller $x = \pi/3 + n\pi$, där n får vara vilket heltal som helst.

Svar: $x = n\pi$ eller $x = \pi/3 + n\pi$, där n får vara vilket heltal som helst.

2. Låt $z = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$. Skriv z^{10} på rektangulär form (dvs på formen $a + ib$).

$$\begin{aligned} z^{10} &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/6}\right)^{10} \\ &= (\sqrt{2})^{10}e^{i10\pi/6} \\ &= 32\left(\cos \frac{10\pi}{6} + i \sin \frac{10\pi}{6}\right) \\ &= 16 - 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Svar: $16 - 16\sqrt{3}i$

3. Bevisa med induktion att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3 för alla positiva heltal n .

Lösning: Steg 1, bassteget. Om $n = 1$ så är $4^n - 1 = 4^1 - 1 = 3$ som uppenbart är jämnt delbart med 3.

Steg 2, induktionssteget. Antag att $4^p - 1$ är jämnt delbart med 3, för något heltal $p \geq 1$. Vi ska undersöka vad detta antagande leder till för slutsatser om $4^{p+1} - 1$. Vi ser att $4^{p+1} - 1 = 4(4^p - 1) + 3$, och detta är nu delbart med 3 eftersom: den första termen är delbar med 3 enligt vårt antagande och den andra termen är uppenbart delbar med 3.

Steg 3, slutsats: Det följer med induktion att $4^n - 1$ är delbart med 3 för alla positiva heltal n .