

KTH  
Matematik  
Lars Filipsson

### Några extra uppgifter inför Lappskrivning 3

Matematik Baskurs

1. Beräkna  $\cos\left(\frac{4711\pi}{3}\right)$ .
2. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos x = \frac{1}{2}$ .
3. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\sin x = \frac{1}{2}$ .
4. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{32\pi}{3}\right)$ .
5. Utgå från formeln  $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$  och härled formeln  $\sin^2 v = (1 - \cos 2v)/2$ .
6. Låt  $z = \sqrt{3} + i$ . Skriv  $z$  på polär form och beräkna sedan  $z^{10}$  och  $1/z^4$ . Svaren ska ges på formen  $a + ib$ .
7. Om  $z$  är som i föregående uppgift och  $w = 2i$ , vad är realdelen av  $w^9/z^7$ ?
8. Bestäm  $\cos v$  och  $\tan v$  om  $\pi/2 < v < \pi$  och  $\sin v = 1/7$ .
9. Bestäm  $\cos x$  om  $\sin^2 x = 1/3$  och  $\pi/2 < x < \pi$ .
10. Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen  $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$ .
11. Lös ekvationen  $\sin 2x = \cos x$ .

12. Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket  $a \cos x + b \sin x$  kan ta. Svaret kommer förstås att innehålla de rella talen  $a$  och  $b$ .
13. Bevisa med induktion att  $4^{2n+1} + 3^{2+n}$  är jämnt delbart med 13 för alla positiva heltal  $n$ .
14. Vi definierar en följd av tal,  $a_1, a_2, a_3 \dots$  genom att först sätta  $a_1 = 1$  och därefter för alla heltal  $n > 1$  sätta  $a_{n+1} = 3a_n/(a_n + 1)$ . Bevisa med induktion att  $a_n < 2$  för alla heltal  $n \geq 1$ .
15. Bestäm  $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$ ,  $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{3}\right)$ ,  $\cos\left(\arccos \frac{8}{9}\right)$ ,  $\arccos\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$ ,  $\cos(\arcsin v)$ ,  $\tan(\arccos u)$ .