KTH
Matematik
Lars Filipsson

Facit till
Några extra uppgifter inför Lappskrivning 3

Matematik Baskurs

1. Beräkna $\cos\left(\dfrac{4711\pi}{3}\right)$.

Svar: 1/2

2. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Svar: $x = \pm\pi/3 + n2\pi$, n godtyckligt heltal.

3. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Svar: $x = \pi/6 + n2\pi$, n godtyckligt heltal eller $x = 5\pi/6 + n2\pi$, n godtyckligt heltal.

4. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\cos(4x + \dfrac{\pi}{3}) = \cos(-\dfrac{32\pi}{3})$.

Svar: $x = \pi/12 + n\pi/2$, n godtyckligt heltal eller $x = \pi/4 + n\pi/2$, n godtyckligt heltal.

5. Utgå från formeln $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ och härled formeln $\sin^2 v = (1 - \cos 2v)/2$.

6. Låt $z = \sqrt{3} + i$. Skriv z på polär form och beräkna sedan z^{10} och $1/z^4$. Svaren ska ges på formen $a + ib$.

Svar: $z = 2e^{i\pi/6}$ och $z^{10} = 1024e^{10i\pi/6} = 512 - 512\sqrt{3}i$ och $1/z^4 = -1/32 - (\sqrt{3}/32)i$

7. Om z är som i föregående uppgift och $w = 2i$, vad är realdelen av w^9/z^7?

Svar: -2

8. Bestäm $\cos v$ och $\tan v$ om $\pi/2 < v < \pi$ och $\sin v = 1/7$.

Svar: $\cos v = -\sqrt{48}/7$ och $\tan v = -1/\sqrt{48}$

9. Bestäm $\cos x$ om $\sin^2 x = 1/3$ och $\pi/2 < x < \pi$.

Svar: $-\sqrt{2/3}$

10. Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$.

Svar: Välj till exempel fem av lösningarna $x = -\pi/12 + k2\pi/3$, k heltal (det finns ännu fler). Dvs sätt in fem olika specifika heltal istället för k.

11. Lös ekvationen $\sin 2x = \cos x$.

Svar: $x = \pi/2 + k\pi$, k heltal, eller $x = \pi/6 + k2\pi$, k heltal, eller $x = 5\pi/6 + k2\pi$, k heltal

12. Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket $a\cos x + b\sin x$ kan ta. Svaret kommer förstås att innehålla de rella talen a och b.

Svar: $\sqrt{a^2+b^2}$ är största och $-\sqrt{a^2+b^2}$ är minsta värdet.

13. Bevisa med induktion att $4^{2n+1} + 3^{2+n}$ är jämnt delbart med 13 för alla positiva heltal n.

14. Vi definierar en följd av tal, $a_1, a_2, a_3 \ldots$ genom att först sätta $a_1 = 1$ och därefter för alla heltal $n > 1$ sätta $a_{n+1} = 3a_n/(a_n + 1)$. Bevisa med induktion att $a_n < 2$ för alla heltal $n \geq 1$.