KTH
Matematik
Lars Filipsson

Facit till
Några extra uppgifter inför tentan

Matematik Baskurs

1. Låt $f(x) = \ln|2x+\sqrt{4x^2+9}| + \ln|2x-\sqrt{4x^2+9}|$. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till f och rita kurvan $y = f(x)$.

Svar: $D_f = \mathbf{R}$ och $V_f = \{\ln 9\}$, kurvan det frågas efter är linjen $y = \ln 9$ (kolla först vilka x man kan stoppa in i de båda ln-arna och använd sedan loglagar för att skriva om och förenkla).

2. Finn alla reella lösningar till ekvationen $x^3 + x^2 - 5x = 5$.

Svar: $x = -1, \pm\sqrt{5}$. Skriv om på formen $p(x) = 0$ (dvs flytta över femman), gissa roten -1 och dividera sedan bort faktorn $x+1$ och sök nollställen till den kvot som återstår.

3. Bestäm alla reella tal x som uppfyller att $\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right| \leq \dfrac{1}{2}$.

Svar: $1 \leq x \leq 7/3$

4. Du har en byrålåda innehållande 6 röda och 6 gröna strumpor. Du tar 2 strumpor på måfå men är tyvärr färgblind och kan inte skilja på rött och grönt. Vilket är mest sannolikt, att du får två strumpor av samma färg eller två strumpor av olika färg?

Svar: Olika, tyvärr! Men det skiljer inte så mycket: 6/11 är sannolikheten för olika och 5/11 för lika.

5. Bestäm konstanta termen (den som inte innehåller x) i utvecklingen av $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^{14}$.

Svar: -439296

6. Lös olikheten $\dfrac{x+3}{x-1} < \dfrac{x+1}{x-3}$.

Svar: Alla $x < 1$ och alla $x > 3$ (och inga andra) uppfyller olikheten.

7. För vilka reella tal x är det sant att $\dfrac{12 - 10x - 2x^2}{x^2 - 10x - 11} \geq 0$?

Svar: Det är sant för alla x sådana att $-6 \leq x < -1$ och för alla x sådana att $1 \leq x < 11$.

8. Låt $z = 2e^{i\pi/3}$ och $w = 3e^{-i7\pi/6}$. Bestäm imaginärdelen av $\dfrac{\overline{z}^4}{w^3}$.

Svar: $8/27$

9. Betrakta påståendet $|x-5| \leq 1 \implies |x^2-1| \leq 5$. Bevisa att det är sant eller bevisa att det är falskt.

Svar: Falskt

10. Hur många olika legotorn som är 10 bitar höga kan man bygga av 5 gula och 5 gröna legoklossar (med samma form)?

Svar: 252

11. Är det sant eller falskt att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5 för alla positiva heltal n? Bevisa att det är sant eller bevisa att det är falskt.

Svar: Sant. Använd induktion.

12. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till $f(x) = \ln(-(x+4)(x-3))$ och avgör om f har invers.

Svar: D_f är intervallet $-4 < x < 3$ och V_f är intervallet $-\infty < x \leq \ln 12,25$. Invers saknas.

13. Avgör vilka vinklar v i intervallet $\pi/2 < v < 3\pi/2$ som uppfyller att $\sin(2v + \pi/6) = 1/2$.

Svar: $v = \pi$ är en möjlighet, den andra är $v = 4\pi/3$.

14. Finn alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{24 - 2x} = x$.

Svar: $x = 4$

15. Avgör om $2x + y^2/2 = 1 + 4y - x^2/2$ är ekvationen för en cirkel. Bestäm i så fall medelpunkt och radie.

Svar: Ja, medelpunkten är $(-2, 4)$ och radien är $\sqrt{22}$.

16. Vad är koefficienten framför x^7 i polynomet $p(x) = (3x + 2)^9$?

Svar: 314928

17. Förenkla så långt som möjligt uttrycket $\dfrac{\ln(e^x)^2 \cdot \ln\sqrt{e^{x^2}}}{xe^{\ln(\ln x)}}$.

Svar: $x^2/\ln x$

18. Bevisa att $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. (Alla trigonometriska formler och satser du behöver använda på vägen måste härledas.)

19. Förklara varför det är en bra ide att låta x^{-n} betyda $1/x^n$.

20. Beräkna summorna $\displaystyle\sum_{k=2}^{50} 5(2k + 2)$ och $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(2k + 2^k)$.

Svar: 13230 och 2152.

21. Bestäm inversen, om den finns, till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 1)\,,\ x \geq 0$.

Svar: $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$ (Utan det lilla kravet $x > 0$ hade inversen inte funnits...)

22. Avgör om det är sant att $f(x) = e^{2x}$ har inversen $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln x$.

Svar: Sant!

23. Bevisa att för alla komplexa tal z gäller att $|z|^2 = z\overline{z}$.

Svar: Sätt $z = a + ib$ och räkna på.

24. Om x är ett reellt tal så är $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Bevisa utgående från detta att $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

Tips: Vad blir e^{-ix}?

25. För vilka komplexa tal z gäller att $e^z = 1$?

Svar: $z = n2\pi i$, n heltal.

26. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

Svar: $x = \pi/2 + n\pi$, n heltal och $x = \pm 2\pi/3 + n2\pi$, n heltal, löser ekvationen.

27. Vilka vinklar v uppfyller att $\cos^4 v - \sin^4 v = \cos 2v$?

Svar: Alla.

28. Om du vet att för två vinklar u och v gäller att $\tan u = \tan v$, vad kan du då säga om u och v?

Svar: $u = v + n\pi$, n heltal.

29. Lös ekvationen $\tan x = \sin x$.

Svar: $x = n\pi$, n heltal

30. Lös ekvationen $\cos(73x + \pi) = \sqrt{2}/2$.

Svar: $x = -5\pi/292 + n2\pi/73$ eller $x = -3\pi/292 + n2\pi/73$

31. Bestäm inversen, om den finns, till funktionen $f(x) = \sqrt{3x + 4}$. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till f och även till f^{-1} ifall denna existerar.

Svar: $f^{-1}(x) = (x^2 - 4)/3$, $x \geq 0$. $D_f = V_{f^{-1}}$ är alla $x \geq -4/3$ och $V_f = D_{f^{-1}}$ är alla $x \geq 0$

32. Lös ekvationen $\sin 3x = -\sqrt{3}/2$.

Svar: $x = -\pi/9 + n2\pi/3$ eller $x = -2\pi/9 + n2\pi/3$

33. Beräkna $\cos(1593\pi/6)$.

Svar: 0

34. Höjden y över havet (i meter) hos en viss spärrballong varierar med tiden t (i timmar) enligt formeln $y = ct + d$ för några konstanter c och d. Vid tidpunkten $t = 0$ var höjden exakt 1000 meter och en timme senare var höjden 997 meter. Beräkna talen c och d och avgör när ballongen når havsytan.

35. Bestäm inversen, om den finns, till funktionen $h(x) = \dfrac{2x+4}{x}$.

36. Är det sant att $\ln 4711 - \ln 4709 = \ln 2$?

37. Är det sant att $23 = \ln e^{\ln 23}$?

38. Lös ekvationen $\dfrac{1}{\ln x} = \ln x$.

39. Lös ekvationen $\ln x = 1 - \ln(x+3)$.

40. Lös olikheten $5 + 4e^x - e^{2x} > 0$.

41. Lös ekvationen $9^{1-x} = 3^x$.

42. I landet där alla invånare antingen talar sanning hela tiden eller ljuger hela tiden stöter du på ett par urinvånare som heter Artil och Bertil. Artil säger: Jag talar alltid sanning. Bertil säger: Nej nej, vi är båda två ena riktiga lögnare! Vem ska man tro på?

43. Beräkna $\binom{82}{50} - \binom{82}{32}$.

44. Beräkna $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \cdots + \binom{9}{9}$.