Lösningsförslag till Modell-Tentamen i 5B1121 Matematik baskurs
HÖSTTERMINEN 2005

OBS: Nedanstående lösningar är tillkomna i hast och innehåller säkert ett och annat fel. Hör av er om ni hittar något som verkar konstigt.

1. **Låt C vara cirkeln med ekvation $x^2 + (y-2)^2 = 4$ och låt L vara den linje som passerar genom C:s medelpunkt och som är vinkelrät mot linjen med ekvation $x + 2y = 0$. Bestäm samtliga skärningspunkter mellan L och C.**

Lösning: Eftersom $x + 2y = 0 \iff y = -x/2$ så ges L av en ekvation $y = 2x + m$ för något tal m och om linjen ska gå genom C:s medelpunkt $(0, 2)$ så måste m vara 2. Skärningspunkterna mellan L och C är alltså alla punkter med kordinater (x, y) som uppfyller både att $x^2 + (y-2)^2 = 4$ och $y = 2x + 2$. Insättning av det senare sambandet i det första ger att $x^2 + (2x)^2 = 4$ vilket är ekvivalent med att $x = \pm 2/\sqrt{5}$, vilket är x-koordinaterna för skärningspunkterna. Sätter vi in dem i linjen L:s ekvation får vi y-koordinaterna $y = \pm 4/\sqrt{5} + 2$. Skärningspunkterna är alltså $(2/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5} + 2)$ och $(-2/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5} + 2)$.
Svar: $(2/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5} + 2)$ och $(-2/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5} + 2)$.

2. **Du får veta att $\cos(2x + \pi) = \dfrac{1}{2}$, $\tan 2x < 0$ och $|x| \leq \pi/2$. Bestäm x.**

Lösning: $\cos(2x+\pi) = 1/2 \iff 2x+\pi = \pm\pi/3+n2\pi \iff x = -\pi/3+n\pi$ eller $x = -2\pi/3 + n\pi$, n godtyckligt heltal. De enda av dessa lösningar som uppfyller att $|x| \leq \pi/2$ är $x = \pm\pi/3$ och den enda av dessa som uppfyller att $\tan 2x < 0$ är $x = \pi/3$.
Svar: $x = \pi/3$.

3. **Bevisa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ för alla heltal $n \geq 1$.**

Lösning: Bassteg. Om $n = 1$ så är $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1$ och $n^2 = 1$. Induktionssteg. Anta att $\sum_{k=1}^{p}(2k-1) = p^2$ för något visst heltal $p \geq 1$. Då gäller att $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) =$

$p^2 + 2(p+1) - 1 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$. Slutsats: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ för alla heltal $n \geq 1$.

---

4. **Finn samtliga reella tal x som uppfyller att $x^4 - x^3 < 5x^2 + x + 6$.**

Lösning: Låt $p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$. Då är olikheten ekvivalent med att $p(x) < 0$. För att lösa den faktoriserar vi först $p(x)$. Efter prövning ser vi att $p(-2) = 0$ och $p(3) = 0$. Faktorsatsen ger då att $p(x) = (x+2)(x-3)q(x)$ för nåt polynom q. Division ger sedan att $p(x) = (x+2)(x-3)(x^2+1)$ där den sista faktorn inte kan delas upp ytterligare eftersom den aldrig kan bli 0. Teckenstudium ger nu att $p(x) < 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 3$.
Svar: $-2 < x < 3$

5. Lös ekvationen $\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+5) = 0$.

Lösning: Med hjälp av loglagarna ser vi att den givna ekvationen är ekvivalent med

$$\ln \frac{(x+1)(x+2}{x+5} = 0$$

vilket i sin tur, om $x > -1$, är ekvivalent med att

$$\frac{(x+1)(x+2}{x+5} = 1$$

dvs $(x+1)(x+2) = x+5$ med lösningar (efter omskrivning och användning av pq-formeln) $x = 1$ och $x = -3$ där dock bara den första lösningen är större än -1.
Svar: $x = 1$

6. Avgör vilket som är störst, $\sum_{k=1}^{100}(2k-90)$ eller $\sum_{k=1}^{10}(2^k-90)$.

Lösning: Den första summan är aritmetisk. Summan är antalet termer gånger medelvärdet av första och sista termen, dvs $100(2-90+200-90)/2 = 1100$. Den andra summan delar vi upp i två och använder formeln för en geometrisk serie på den ena delen: $\sum_{k=1}^{10}(2^k-90) = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \sum_{k=1}^{10} 90 = (1-2^{11})/(1-2) - 1 - 900 = 1146$.
SVar: Den andra.

7. Finn samtliga komplexa tal z som har absolutbelopp 1 och ett argument v som uppfyller att $\sin^2 v + \sin v \cos v = 1/2$.

Lösning: $|z| = 1$ betyder att $z = e^{iv}$ för något tal v. $\sin^2 v + \sin v \cos v = 1/2 \iff (1 - \cos 2v)/2 + (\sin 2v)/2 = 1/2 \iff \sin 2v = \cos 2v \iff 2v = \pi/4 + n\pi \iff v = \pi/8 + n\pi/2$, n heltal. Om vi skriver om detta på rektangulär form ser vi att det finns fyra olika lösningar: $z_1 = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$, $z_2 = \cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)$, $z_3 = \cos(9\pi/8) + i\sin(9\pi/8)$, $z_4 = \cos(13\pi/8) + i\sin(13\pi/8)$.

8. Härled formeln $\ln ab = \ln a + \ln b$, utgående från sambandet $y = e^x \iff x = \ln y$ och potenslagen $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. (För vilka a, b gäller formeln?)

Lösning: Eftersom $\ln x$ bara är definierat då $x > 0$ så kan bara formeln gälla för positiva a, b. Anta att $a, b > 0$. Då finns x och y så att $a = e^x$ och $b = e^y$ och $x = \ln a$ och $y = \ln b$. Vi får att $\ln ab = \ln(e^x e^y) = \ln e^{x+y} = x + y = \ln a + \ln b$.