



KTH Teknikvetenskap

SF1620 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2, 2007

Uppgift

- a) Bestäm den lösning till ekvationen

$$5 \sin(3\pi t + 1) = 3$$

som ligger närmast $t = 3$. Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. (4)

- b) Skriv $\sin v - \sin(v + 21^\circ) + \sin(v + 110^\circ)$ på formen $A \sin(v + \phi)$. Ange A med två gällande siffrors noggrannhet ϕ i hela grader. (3)

- c) I samband med variabelbyte i integraler är det intressant att kunna uttrycka $\sin x$ och $\cos x$ som funktioner av $\tan(x/2)$. Härled ett uttryck för $\sin x$ som inte innehåller några andra trigonometriska funktioner än $\tan(x/2)$. (2)

Lösningsförslag

- a) Det finns två lösningar till $\sin(x) = 3/5$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ nämligen $x_1 \approx 0,64$ och $x_2 \approx \pi - 0,64 \approx 2,50$. Motsvarande lösningar till ekvationen $5 \sin(3\pi t + 1) = 3$ ges av

$$t = \frac{x_1 - 1}{3\pi} \approx -0,04 \quad \text{och} \quad t = \frac{x_2 - 1}{3\pi} \approx 0,16.$$

Perioden hos funktionen $5 \sin(3\pi t + 1)$ är $(2\pi)/(3\pi) = 2/3 \approx 0,67$, vilket gör att den allmänna lösningen ges av

$$t \approx -0,04 + 2n/3 \quad \text{och} \quad t \approx 0,16 + 2n/3.$$

där n är ett godtyckligt heltal. För $n = 5$ ger den första lösningen $t \approx 3,29$ och för $n = 4$ ger den andra lösningen $t \approx 0,16 + 8/3 \approx 2,83$. Eftersom perioden är större än avståndet mellan dessa lösningar och $t = 3$ kan det inte finnas någon lösning om ligger närmre och den närmaste av dessa två är $t \approx 2,83$.

b) Vi använder först additionssatsen för sinus för att skriva

$$\begin{aligned} f(v) &= \sin v - \sin(v + 21^\circ) + \sin(v + 110^\circ) \\ &= \sin v - \sin v \cos 21^\circ - \cos v \sin 21^\circ + \sin v \cos 110^\circ + \cos v \sin 110^\circ. \end{aligned}$$

När vi sedan samlar ihop termerna med $\sin v$ och $\cos v$ för sig får vi

$$\begin{aligned} f(v) &= (1 - \cos 21^\circ + \cos 110^\circ) \sin v + (-\sin 21^\circ + \sin 110^\circ) \cos v \\ &\approx -0,276 \sin v + 0,581 \cos v. \end{aligned}$$

För att detta ska vara lika med $A \sin(v + \phi) = A \sin v \cos \phi + A \cos v \sin \phi$ vill vi att

$$\begin{cases} A \cos \phi = -0,276 \\ A \sin \phi = 0,581. \end{cases}$$

Summan av kvadraterna ger enligt trigonometriska ettan att

$$A^2 = A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = (-0,276)^2 + (0,581)^2 \approx 0,414.$$

Om vi sätter in $A = \sqrt{0,414} \approx 0,643 \approx 0,64$ i ekvationerna ovan får vi

$$\begin{cases} \cos \phi = -0,418, \\ \sin \phi = 0,904 \end{cases}$$

vilket motsvarar $\phi \approx 115,4^\circ \approx 115^\circ$.

c) Vi använder oss först av formeln för sinus av dubbla vinkeln, dvs

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$$

och eftersom $\tan(x/2) = \sin(x/2) / \cos(x/2)$, kan vi därmed skriva

$$\sin x = 2 \tan(x/2) \cos^2(x/2).$$

Eftersom vi enligt trigonometriska ettan har att

$$\tan^2(x/2) = \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} = \frac{1 - \cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} = \frac{1}{\cos^2(x/2)} - 1$$

kan vi skriva

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + \tan^2(x/2)}$$

vilket till slut ger oss

$$\sin x = 2 \tan(x/2) \cos^2(x/2) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}.$$

Svar:

a) Den lösning som ligger närmast $t = 3$ är $t \approx 2,83$.

b) $\sin v - \sin(v + 21^\circ) + \sin(v + 110^\circ) \approx 0,64 \sin(v + 115^\circ)$.

c) $\sin x = 2 \tan(x/2) / (1 + \tan^2(x/2))$.

Bedömningskriterier

- a)
 - En korrekt lösning till $\sin(x) = 3/5$, **1 poäng**.
 - En korrekt lösning till den givna ekvationen, **1 poäng**.
 - Korrekt allmän lösning, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverad lösning närmast $t = 3$, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst tre poäng om svaret ej har korrekt antal gällande siffror.
- b)
 - Korrekt användning av additionssatsen för att utveckla uttrycket, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat värde på A , **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat värde på ϕ , **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst två poäng om noggrannheten ej är korrekt.
- c)
 - Korrekt härledd formel, **2 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.