Lösningsförslag till Kontrollskrivning 1 i SF1621 Amelia 2 för T och OPEN
7 februari 2008 kl 08.15-10.00

1. Låt A vara avbildningsmatrisen för den linjära avbildning i rummet som består i ortogonal projektion på planet med ekvation $2x-2y+z=0$ (standardkoordinater). Bestäm, om möjligt, tre linjärt oberoende egenvektorer till A samt tillhörande egenvärden.

Lösning: Egenvektorer till A är vektorer $\mathbf{v}$ som uppfyller att $A\mathbf{v}=k\mathbf{v}$ för nåt tal k (detta tal är då egenvärdet). För projektionen inser man direkt att för alla vektorer $\mathbf{v}$ som ligger i planet gäller att $A\mathbf{v}=\mathbf{v}$, dvs dessa är egenvektorer med egenvärde 1. För normalen till planet, $\mathbf{n}=(2,-2,1)^T$ gäller att $A\mathbf{n}=0\mathbf{n}$, dvs den är egenvektor med egenvärde 0.
Alltså är $(1,1,0)^T$ och $(1,0,-2)^T$ egenvektorer med egenvärde 1 och $(2,-2,1)^T$ egenvektor med egenvärde 0.

2. Låt $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Vi inför nu en ny ON-bas $(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$ genom sambanden:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_3=\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

A. Bestäm koordinaterna i den nya basen för den vektor $\mathbf{v}$ som i standardbasen har koordinaterna $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$.

B. Bestäm avbildningsmatrisen i den nya basen för den linjära avbildning som i standardbasen har matris $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Lösningside: Basbytesmatrisen $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Eftersom C är en ON-matris blir $C^{-1}=C^T$. Därefter återstår bara lite matriskalkyl för att lösa uppgiften:
Deluppgift A. Här får man svaret genom att räkna ut $C^{-1}\mathbf{v}=....$

Deluppgift B. Här får man svaret genom att räkna ut $C^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}C = ...$

3. En viss linjär avbildning L har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, en ON-bas i vilken avbildningsmatrisen för L är diagonal.

Lösning: Eftersom den givna matrisen är symmetrisk vet vi att det går att hitta en ON-bas med de angivna egenskaperna. Först söks egenvärden till matrisen. Dessa fås som lösningar k till ekvationen

$$\det\begin{pmatrix}9-k & 12\\ 12 & 16-k\end{pmatrix} = 0,$$

dvs lösningar till $(9-k)(16-k)-144=0$ dvs $k=25$ och $k=0$. Nu tar vi fram egenvektorer som hör till respektive egenvärde. För $k=25$ får vi egenvektorer som lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix}9-25 & 12\\ 12 & 16-25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Löser vi ekvationssystemet får vi egenvektorerna $t\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$, där t får vara vilket reellt tal som helst.

För $k=0$ får vi egenvektorer som lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix}9-0 & 12\\ 12 & 16-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Löser vi ekvationssystemet får vi egenvektorerna $t\begin{pmatrix}-4\\ 3\end{pmatrix}$, där t får vara vilket reellt tal som helst.

Nu har vi egenvärden och egenvektorer till matrisen. I en bas av egenvektorer är matrisen diagonal. Vi ska alltså välja en basvektor för vardera egenvärdet. Vill vi ha en ON-bas ska vi välja dem så att de får längd 1 och kolla att de är ortogonala mot varandra.

Vi ser att om vi väljer basvektorerna $\begin{pmatrix}3/5\\ 4/5\end{pmatrix}$, och $\begin{pmatrix}-4/5\\ 3/5\end{pmatrix}$ så har vi en ON-bas, i vilken den aktuella matrisen blir diagonal.

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska (1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt svar, 0 poäng för varje uteblivet svar. Om poängsumman totalt på uppgiften är negativ, sätts dock poängen på uppgiften till 0. Chansa inte! Ge bara de svar du är säker på!).

A. Om den kvadratiska matrisen A uppfyller att $A^T = A$ så finns en ON-matris C sådan att $C^T AC$ är diagonal.

SANT

B. Vektorerna $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ i $\mathbb{R}^6$ är linjärt oberoende om och endast om den matris som har vektorerna $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ som kolonner har determinant skild från 0.

FALSKT (en matris med 6 rader och 4 kolonner har ingen determinant)

C. Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

SANT

D. Vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

FALSKT