EXTREMT KORTFATTADE LOSNINGAR TILL
Förprov till kontrollskrivning 2 i SF1621 Amelia 2
för T och OPEN vårterminen 2008

Facit kan innehålla fel. Kolla med varandra. Om ni är flera som är överens om att det är fel i facit, mejla till lfn@kth.se .

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{1}{y^3} dxdy$ där D är det ändliga område som begränsas av linjerna $y = 4$ och $y = x$ samt hyperbeln $xy = 4$.

Losning: Rita omradet!!! Relevanta skarningspunkter ar (2,2), (1,4) och (4,4). Ta x-integralen innerst (x ligger da mellan 1/y och y) och y-integralen ytterst. Vi far

$$\iint_D \frac{1}{y^3} dxdy = \int_2^4 \left(\int_{1/y}^{y} dx \right) dy = \int_2^4 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^4} \right) dy = \frac{41}{192}.$$

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(x + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dxdy$ där D ges av olikheterna $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ och $x \leq 0$.

Losning. Vi byter till polara koordinater och far (r mellan 2 och 5 och v mellan $\pi/2$ och $3\pi/2$:

$$\iint_D \left(x + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dxdy = \int_2^5 \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (r\cos v + \frac{r\sin v}{r^2}) r dv \right) dr = -78$$

3. Beräkna volymen av den kropp K i första kvadranten som begränsas av koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ samt paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$.

Losning. Vi anvander polara koordinater och far (kortfattat):

$$\text{Volymen} = \iiint_K dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} (4 - r^2) r dv \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (4r - r^3) dr = 2\pi.$$

4. Beräkna volymen av den kropp K som definieras av olikheterna $0 \leq 3x + 4y \leq 1$, $1 \leq 5y - x \leq 2$ och $1 \leq z \leq 5y - x$.

Losning (vid det andra likhetstecknet nedan byter vi koordinater, enligt $u = 3x + 4y$, $v = 5y - x$, och tar upprepad enkelintegration):

$$\text{Volymen} = \iiint_K dxdydz = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{v-1}{19} dv \right) du = \frac{1}{38}.$$

5. Visa att den generaliserade integralen

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

är konvergent och bestäm dess värde.

SVAR: 2π (Se övningsboken uppgift 6.40)

6. Låt K vara enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$

SVAR: $4\pi/5$. (Se övningsboken uppgift 7.8 a.)

7. Beräkna arean av ytan Y som ges av ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 1$.

SVAR: π. (Se ev övningsboken uppgift 8.16)

8. Sant eller falskt?

A. Summan $\sum_{j=1}^{n} e^{jk/n^2} \frac{1}{n^2}$ är en Riemannsumma till funktionen e^{xy} på området D som ges av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, hörande till en indelning av D i lika stora kvadrater med sida $1/n$.

B. Integralen $\iint_D 1\, dxdy$ kan tolkas både som arean av området D i xy-planet och som volymen av den kropp i xyz-rymden som ges av $(x, y) \in D$ och $0 \leq z \leq 1$.

SVAR: Båda påståendena är sanna.