OTROLIGT KORTFATTADE LÖSNINGAR TILL
Kontrollskrivning 2 i SF1621 Amelia 2 för T+OPEN

1. **Beräkna dubbelintegralen** $\iint_D \frac{2x^2}{y^2} dxdy$ **där** D **är det ändliga område i första kvadranten som begränsas av linjerna** $x = 4$ **och** $y = x$ **samt hyperbeln** $xy = 4$**.**

LOSNING. Rita området! Upprepad enkelintegration med y-integralen innerst ger

$$\iint_D \frac{2x^2}{y^2} dxdy = \int_2^4 \left(\int_{4/x}^x \frac{2x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_2^4 (-2x + x^3/2) dx = 18.$$

2. **Beräkna dubbelintegralen** $\iint_D \left(1 + \frac{x + 5y}{x^2 + y^2}\right) dxdy$ **där** D **ges av olikheterna** $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$.

LOSNING. Vi använder polära koordinater o upprepad enkelintegraion och får:

$$\iint_D \left(1 + \frac{x + 5y}{x^2 + y^2}\right) dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_2^3 \left(1 + \frac{r\cos v + 5r\sin v}{r^2}\right) rdr \right) dv = 2 + \frac{5\pi}{2}.$$

3. **Beräkna volymen av den kropp** K **som beskrivs av olikheterna** $0 \leq 2x + 3y \leq 1$**,** $1 \leq y - 2x \leq 2$ **och** $0 \leq z \leq y - 2x$**.**

LOSNING. Vi låter D vara det område i xy-planet som ges av de första båda olikheterna i uppgiften och byter koordinater enligt $u = 2x + 3y$, $v = y - 2x$:

$$\text{Volymen} = \iint_D (y - 2x) dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{v}{8} du \right) dv = \frac{3}{16}.$$

4. **Beräkna dubbelintegralen** $\iint_D dxdy$ **där** D **är det område i första kvadranten som ges av olikheterna** $1 \leq x^2 - y^2 \leq 4$ **och** $3 \leq x + y \leq 4$**. Denna dubbelintegral har en naturlig tolkning – vilken?**

LOSNING. Den naturliga tolkningen ar arean av området D, (alternativt volymen av den kropp som ges av att $(x, y) \in D$ och $0 \leq z \leq 1$). Vi byter till nya koordinater $u = x^2 - y^2$, $v = x + y$, då blir det $J_{u,v} = 2x + 2y = 2v$ och följaktligen det $J_{x,y} = 1/2v$, och vi får:

$$\iint_D dxdy = \int_3^4 \left(\int_1^4 \frac{1}{2v} du \right) dv = \int_3^4 \frac{3dv}{2v} = \frac{3}{2}\ln 4 - \frac{3}{2}\ln 3 = \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}.$$