KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

SF16121 Analytiska metoder och linjär algebra II
Modelltentamen vt 2008

Inga hjälpmedel. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Uppgifterna 1-2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas).

Uppgifterna 3-6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.

Uppgifterna 7-10 är mer avancerade. Poängen som delas ut på dessa uppgifter är VG-poäng. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal VG-poäng.

Preliminära betygsgränser: A - 36 poäng varav minst 11 VG-poäng, B - 31 poäng varav minst 7 VG-poäng, C - 25 poäng varav minst 3 VG-poäng, D - 21 poäng, E - 20 poäng, Fx - 18 poäng. Lycka till!!

——————————-Uppgifter som motsvarar varsin KS——————————-

1. En viss linjär avbildning L har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, en ON-bas i vilken avbildningsmatrisen för L är diagonal.

2. Beräkna $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : x^2+y^2-2x \le 0\}$.

——————————- G-uppgifter——————————-

3. Bestäm alla punkter på funktionsytan $z = x^2+4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x+y+z=0$.

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{y^2}{1+x^2y^2}dx + \left(\frac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy)\right) dy$$

längs kurvan $y = \sqrt{x}$ från origo till punkten $(1,1)$.

5. Bestäm tröghetsmomentet

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

med avseende på z-axeln för den homogena kropp K som ges av olikheterna

$$\frac{2}{6 + x^2 + y^2} \le z \le \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

6. Man vill tillverka ett tält utan botten med två rektangulära sidor och två gavlar i form av likbenta trianglar med basen mot marken. Bestäm höjden i det tält som har volymen V och kräver minimal tygåtgång.

——————————- VG-uppgifter——————————-

7. Formulera och bevisa Lagranges multiplikatormetod för optimering av $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Formulera också motsvarande sats (utan bevis) för optimering av $f(x, y, z)$ under bivillkoren $g_1(x, y, z) = 0$ och $g_2(x, y, z) = 0$.

8. Matrisen M har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ och $\lambda_3 = -1/3$ med tillhörande egenvektorer $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$. En följd av vektorer $\mathbf{u_0}$, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}\dots$ definieras av att $\mathbf{u_{n+1}} = M\mathbf{u_n}$ och att $\mathbf{u_0} = \mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3}$. Bestäm $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u_n}$.

9. Avgör om ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3 z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

i en omgivning av punkten $(1, 1, 1, 1, 1)$ definierar x, y och z som C^1 funktioner av u och v. Beräkna i så fall $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ i punkten $(u, v) = (1, 1)$.

10. En vätska har konstant densitet ρ kilogram per kubikmeter och hastighetsfältet

$$\mathbf{v} = (x^2 - y^2, 2xy, z) \quad \text{m/s}.$$

Bestäm hur stor massa som strömmar ut ur den cylindriska volymen V som ges av ekvationerna $x^2 + y^2 \le 1$ och $|z| \le 1$ per sekund.