

KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

FACIT TILL
SF16121 Analytiska metoder och linjär algebra II
Modelltentamen vt 2008

Inga hjälpmedel. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna 1-2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas). Uppgifterna 3-6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter. Uppgifterna 7-10 är mer avancerade. Poängen som delas ut på dessa uppgifter är VG-poäng. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A - 36 poäng varav minst 11 VG-poäng, B - 31 poäng varav minst 7 VG-poäng, C - 25 poäng varav minst 3 VG-poäng, D - 21 poäng, E - 20 poäng, Fx - 18 poäng. Lycka till!!

—————Uppgifter som motsvarar varsin KS—————

1. En viss linjär avbildning L har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, en ON-bas i vilken avbildningsmatrisen för L är diagonal.

Svar: Tex $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Svar: $3\pi/2$, se uppgift 6.24 i övningsboken.

————— G-uppgifter —————

3. Bestäm alla punkter på funktionsytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$.

Svar: $(-1/2, -1/8, 5/16)$, se uppgift 2.12 i övningsboken.

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{y^2}{1+x^2y^2} dx + \left(\frac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy) \right) dy$$

längs kurvan $y = \sqrt{x}$ från origo till punkten $(1, 1)$.

Svar: $\pi/4$, se uppgift 9.38 i övningsboken.

5. Bestäm tröghetsmomentet

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz$$

med avseende på z -axeln för den homogena kropp K som ges av olikheterna

$$\frac{2}{6+x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

Svar: $\pi(11 \ln 5 - 12 \ln 3 - 4)$, se uppgift 8.22 i övningsboken

6. Man vill tillverka ett tält utan botten med två rektangulära sidor och två gavlar i form av likbenta trianglar med basen mot marken. Bestäm höjden i det tält som har volymen V och kräver minimal tygätgång.

Svar: $(V/\sqrt{2})^{1/3}$, detta är uppgift 4.30 i övningsboken

————— - VG-uppgifter —————

7. Formulera och bevisa Lagranges multiplikatormetod för optimering av $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Formulera också motsvarande sats (utan bevis) för optimering av $f(x, y, z)$ under bivillkoren $g_1(x, y, z) = 0$ och $g_2(x, y, z) = 0$.

Svar: Se läroboken kap 4.3.

8. Matrisen M har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ och $\lambda_3 = -1/3$ med tillhörande egenvektorer \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 . En följd av vektorer $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \dots$ definieras av att $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$ och att $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$. Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n$.

Svar: \mathbf{v}_1 . (Med hjälp av den givna informationen och det man har lärt sig i kursen om egenvärden och egenvektorer får man att $M\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{v}_3$

9. Avgör om ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

i en omgivning av punkten $(1, 1, 1, 1, 1)$ definierar x , y och z som C^1 funktioner av u och v . Beräkna i så fall $\frac{\partial y}{\partial u}$ i punkten $(u, v) = (1, 1)$.

Svar: $-3/2$

10. En vätska har konstant densitet ρ kilogram per kubikmeter och hastighetsfältet

$$\mathbf{v} = (x^2 - y^2, 2xy, z) \quad \text{m/s.}$$

Bestäm hur stor massa som strömmar ut ur den cylindriska volymen V som ges av ekvationerna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $|z| \leq 1$ per sekund.

Svar: $2\pi\rho$ kg