Lösningsförslag till Kontrollskrivning 1 i SF1621 Amelia 2 för T och OPEN
Omprov den 27 februari 2008 kl 10.15-12.00

1. **Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Vi inför nu en ny bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ genom sambanden:**

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

A. Är $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ en ON-bas? Motivera!

B. Låt $\mathbf{v} = 2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 + 4\mathbf{f}_3$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ i standardbasen.

Lösning: A. I en ON-bas har basvektorerna längd 1. Eftersom vektorn $\mathbf{f}_2$ har längd $\sqrt{2}$ så är detta ingen ON-bas. (Alternativt argument: I en ON-bas är basvektorerna ortogonala mot varandra dvs har skalärprodukt 0. Eftersom $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 1$ kan detta inte vara en ON-bas.)

B. $\mathbf{v} = 2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 + 4\mathbf{f}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3(\mathbf{e}_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3) + 4(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 + \dfrac{7}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3$. Koordinaterna i den gamla basen är alltså $(5, -1/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2})$.

2. **Låt S vara den linjära avbildning i planet som består i spegling i linjen med ekvation $3x + 4y = 0$ (standardkoordinater). Bestäm avbildningsmatrisen för S (i standardbasen) och bestäm också, om möjligt, två linjärt oberoende egenvektorer till denna matris samt tillhörande egenvärden.**

Lösning: För alla vektorer som är ortogonala mot linjen innebär speglingen multiplikation med talet -1, medan alla vektorer som är parallella med linjen avbildas på sig själva. Vi ser direkt att $(3,4)^T$ är en normalvektor till linjen och denna vektor är då en egenvektor med egenvärde -1. Vi ser även att $(-4,3)^T$ är parallell med linjen och därför är den en egenvektor med egenvärde 1. I den bas som består av dessa båda vektorer får speglingen avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Basbytesmatrisen för basbytet från standardbasen till basen $(3,4)^T$, $(-4,3)^T$ är $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Därför är avbildningsmatrisen för S i standardbasen

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}.$$

(En alternativ lösning (med lite (men inte mycket) jobbigare räkningar) får man genom att börja med att räkna ut speglingarna av standardbasvektorerna och sätta dessa som kolonner i en matris - detta är den sökta matrisen. Sedan räknar man ut egenvärden och egenvektorer till den matrisen med den vanliga metoden.)

3. **Låt L vara den linjära avbildning i planet som (i standardbasen) uppfyller:**

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \textbf{och} \quad L\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen för L i valfri bas. Både basen och avbildningsmatrisen ska anges.

Lösning: Enligt de givna sambanden är $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en egenvektor med egenvärde -2 och $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en egenvektor med egenvärde 3. Dessa båda vektorer är linjärt oberoende och utgör en bas. I den basen, med ordningen av basvektorerna som ovan, har L avbildningsmatris $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(En alternativ (och nästan lika enkel) lösning får man om man väljer standardbasen och kallar elementen i den sökta matrisen för t ex a, b, c och d och skriver upp de givna sambanden på matrisform. Detta resulterar i ett linjärt ekvationssystem ur vilket man lätt löser ut vad a, b, c och d ska vara för tal. (Talen är $1, -1, -6$ och 0).)

4. **Endast svar krävs på denna uppgift! 2 poäng för varje rätt svar. Inga minuspoäng delas ut.**

A. Ange, om möjligt, en vektor v sådan att v tillsammans med $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

B. Låt B vara den matris som för alla $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ uppfyller att $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -6y \end{pmatrix}$. Bestäm samtliga egenvärden till B.

Svar A: Omöjligt.

Svar B: Egenvärdena är -2 och -6.