KTH
Matematik

PROV PÅ FÖRRA KURSEN

Några julnötter att jobba med inför SF1621 Amelia 2 vt08

Efter förra kursen är det självklart att man kan räkna ut en del saker: multiplicera matriser, lösa ekvationssystem, beräkna determinanter, projicera vektorer, beräkna skärningspunkter eller avstånd mellan linjer och plan, beräkna derivator av elementära funktioner (även jobbiga sådana), beräkna integraler med hjälp av variabelsubstitution och partiell integration, förenkla uttryck med logaritmlagar eller trigonometriska formler, beräkna gränsvärden, med mera, med mera. Den som är osäker på något av detta bör repetera ordentligt innan Amelia 2 startar.

Det finns även en del lösningsmetoder som man bör behärska: skissera kurvor med hjälp av att teckenstudera derivatan, lösa max/min-problem, approximera funktioner med Taylorpolynom och uppskatta felet, behärska vissa standardmetoder för att lösa enklare ordinära differentialekvationer, för att nämna några. Men man bör också ha en så bra förståelse av begreppen att man klarar av att använda dem i matematiska resonemang för att lösa tillämpade problem.

Här är några uppgifter att lösa. Den som inte behärskar de räkningar och lösningsmetoder som nämns ovan ska först repetera dessa. Sedan är det fritt fram att hugga in på nedanstående julbord av uppgifter! OBS: lika viktigt är det att repetera linjer och plan, följ länken i aktuelltrutan på kurshemsidan!

1. Anta att f är kontinuerlig och icke-negativ på intervallet $[a, b]$. Härled formeln för volymen av den kropp som genereras då området som definieras av olikheterna $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$, roteras ett helt varv runt x-axeln. Använd sedan denna formel för att härleda volymen av ett klot och volymen av en rät cirkulär kon.

2. En tank är formad som en rät cirkulär kon med spetsen nedåt, basradien är 6 meter och tankens djup 8 meter. Tanken är från början tom men sedan fylls vatten på med hastigheten $0,1$ kubikmeter per minut. Med vilken hastighet stiger vattenytan när vattendjupet är 4 meter?

3. En komet rör sig i ett standard koordinatsystem längs kurvan $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 0$. Hur nära punkten $(0, 1)$ kommer den?

4. Enligt Hookes lag gäller för en fjäder när den dras ut eller trycks ihop att kraften är proportionell mot fjäderns längdändring från jämviktsläget. För en viss fjäder gäller att kraften 250 N ger en längdändring av 5 cm. Bestäm det arbete som utförs då då fjädern töjs ut 10 cm från jämviktsläget.

5. Antag att alla vektorer i rummet projiceras ortogonalt på planet $x + y - z = 0$ (standardkoordinater). Skriv upp koordinaterna för minst en nollskild vektor som inte förändras under projektionen och minst en nollskild vektor som avbildas på en punkt.

6. Om punkten $(1, 5, 0)$ speglas i planet $z = 2x + 2y$ (standardkoordinater) – vad blir spegelpunktens koordinater?

7. Låt $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$. Bestäm ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $F(1/2)$. Kan man göra på mer än ett sätt?

8. Bestäm ett polynom som approximerar funktionen $f(x) = \ln(1+2x)$ med tre korrekta decimaler i intervallet $0 \le x \le 1/2$. Använd sedan detta polynom för att ge ett närmevärde till $\ln 2$.

9. Lektor Larsson vill ha sitt kaffe lagom varmt, närmare bestämt högst 60 grader Celsius. När det kommer ur kaffeapparaten på matteinstitutionen håller kaffet 90 grader. En minut senare har temperaturen sjunkit till 88 grader. När kan han börja dricka?

10. Linjen L passerar genom punkten $(2, 2, 1)$ och skär planet Π i origo, under rät vinkel. Bestäm en ekvation för planet Π.