

Extra uppgifter på differentialkalkyl

SF1621 Analytiska metoder och linjär algebra 2 för OPEN och T

Inledande om grafer, nivåkurvor mm

1. Skissa grafen och nivåkurvorna till funktionen $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Vad är definitionsmängden? Vad är värdemängden?
2. Skissera grafen och nivåkurvorna till funktionen $f(x, y) = y^2$. Vad är definitionsmängden? Vad är värdemängden?
3. Skissera nivåkurvorna och grafen till funktionen $f(x, y) = 1 - x - y$.
4. Skissera följande mängder i \mathbb{R}^2 och avgör om de är öppna, slutna, begränsade, kompakta, sammanhängande. Finn alla randpunkter.

$$M_1 = \{(x, y); x \geq 0, y < 1 - x\}$$

$$M_2 = \{(x, y); 0 < y < 1 - x^2\}$$

$$M_3 = \{(x, y); x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 \leq 0\}$$

$$M_4 = \{(x, y); |x + y| < 1, |x - y| < 1\}$$

5. Låt $M = \{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y \leq 2, 2x + 4y \leq 5\}$. Är M öppen? Är M sluten? Finn alla randpunkter och alla inre punkter till M .
6. Hur ser nedanstående parameterkurva ut?

$$r(t) = (1 + 2t, 3 + 4t, 5 + 6t)$$

7. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{t \rightarrow 1} (\sqrt{4t}, t^2 + 1).$$

8. Bestäm derivatan av $r(t) = (\sqrt{2t}, t^2)$. Vad blir $r'(2)$?
9. Skissa kurvan $r(t) = (t, e^t)$. Känns den igen? Kan man skriva en ekvation för kurvan på något annat sätt?
10. Skriv upp en ekvation för tangenten till kurvan $r(t) = (t^2, t^3 + 1)$ i punkten $(1, 2)$.

Gränsvärde, kontinuitet

11. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1 - x - y}{1 + x + y}.$$

12. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

13. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sin(x + y - 1)}{x + y - 1}.$$

14. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-xy}{x^2 + y^2}.$$

15. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}.$$

16. Kan man definiera funktionen $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}$ i origo så att den blir kontinuerlig där?

Partiella derivator, differentierbarhet, tangentplan, gradient, riktningsderivata

17. Låt $f(x, y) = 7x + 3y^2 + 1$, $g(x, y) = 7xy$ och $h(x, y) = \sqrt{1 + x^2y}$. Beräkna de partiella derivatorna till funktionerna f , g och h .
18. Låt $f(x, y) = 2x + 3y$. Beräkna de partiella derivatorna till f . Är f linjär? Vad är i så fall matrisen för f ? Finns det någon koppling mellan matrisen och de partiella derivatorna?
19. Låt f vara som i föregående uppgift. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 2, 8)$. Kommentär?
20. Låt $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6$. Bestäm tangentplanet i punkten $(1, 2, 3)$ till ytan $z = f(x, y)$.
21. Låt $f(x, y) = x \ln(5x - 2y)$. Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 2, 0)$.
22. Låt $f(x, y) = \frac{8x}{y} - xy + 1$. Bestäm tangentplanet i punkten $(1, 2, 3)$ till ytan $z = f(x, y)$.
23. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + xyz = 7$ i punkten $(2, -1, 1)$.
24. I vilken punkt är $2x + y - 3z = 8$ tangentplan till ellipsoiden $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$?
25. Bestäm gradienten till funktionen $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Bestäm Jacobimatrisen till samma funktion. Kommentär?
26. I vilka punkter är funktionen i föregående uppgift kontinuerlig? I vilka punkter är den differentierbar?
27. Bestäm gradienten till funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \cos(z^2 + 1)$.

28. I vilka punkter är funktionen i föregående uppgift kontinuerlig? I vilka punkter är den differentierbar?
29. Finns det någon funktion av typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som är
- partiellt deriverbar men inte kontinuerlig?
 - differentierbar men inte kontinuerlig?
 - kontinuerlig men inte partiellt deriverbar?
 - differentierbar men inte partiellt deriverbar?
30. Låt $f(x, y) = x^2y^2 + \ln(xy)$. Beräkna gradienten till funktionen f i punkten $(1, 1)$.
31. Beräkna riktningsderivatan till funktionen f i föregående uppgift i punkten $(1, 1)$ i riktning mot punkten $(4, 5)$.
32. Beräkna riktningsderivatan i punkten $(1, 0)$ av funktionen $f(x, y) = xy e^{x^2y}$ i riktningen $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$.
33. Skidfenomenet Willemen Kundente ser alltid till att åka i den riktning där berget lutar kraftigast neråt. Vanligtvis åker han nerför Kebnejaro, ett berg som är format ungefär som ytan $z = e^{-2x^2-3y^2}$. Om han står utanför serveringen belägen på berget rakt ovanför den punkt i xy -planet som har koordinater $(1/6, 1/3)$ och är redo att kasta sig utför backen – i vilken riktning ska han åka?
34. Låt $f(x, y) = xy e^{x^2-y^2}$. I vilken riktning från punkten $(1, 1)$ ökar funktionen snabbast?

Funktionalmatriser, linjär approximation

35. Bestäm Jacobimatrisen till avbildningen $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + x_2^2 \\ \ln(x_1x_2x_3) \end{pmatrix}$. Vilken linjär avbildning approximerar bäst funktionen f i närheten av punkten $(1, 1, 1)$?

36. Låt $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ och $g(x, y) = x^2 + xy$. Beräkna först $f'(t)$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ och $\frac{\partial g}{\partial y}$ och beräkna sedan $(g \circ f)'(t)$ på två olika sätt: dels genom att använda kedjeregeln och dels genom att sätta in f i g och derivera den envariabelfunktion som man då får.
37. Låt $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ 2x + 3y + 4z \end{pmatrix}$ och $G(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$. Beräkna Jacobimatriser för avbildningarna F och G . Vad blir Jacobimatrisen för avbildningen $G \circ F$ i punkten $(1, 1, 1)$?
38. Bestäm den linjära avbildning som i punkten $(1, 0, -1)$ bäst approximerar avbildningen $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 5x + 6y + 7z \end{pmatrix}$. Kommentär?
39. Bestäm den linjära avbildning som i punkten $(1, 2, 3)$ bäst approximerar $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ e^{z(x-1)} \end{pmatrix}$.
40. Bestäm Jacobimatrisen till funktionen $f(r, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$. Vad är determinanten av denna matris? Är matrisen inverterbar? Är f inverterbar?