Facit till Extra uppgifter på differentialkalkyl del 1

1. Se Petermanns bok sid 21 för en liknande uppgift. $D_f = \{(x, y); |(x, y)| \leq 2\}$ och $V_f = [0, 2]$. Nivåkurverna är cirklar och grafen är övre halvan av en sfär.

2. Nivåkurvorna är linjer parallella med x-axeln, $D_f = \mathbf{R}^2$ och $V_f = [0, \infty)$.

3. Nivåkurvorna är linjer parallella med $y = -x$ och grafen är ett plan.

4. M_1 är inte öppen, inte sluten, inte begränsad, inte kompakt, men sammanhängande. Randpunkterna är punkter med x-koordinat 0 och punkter på linjen $y = 1 - x$. M_2 är öppen, begränsade och sammanhängande, inte sluten, inte kompakt. M_3 är en cirkelskiva med radie 2 centrerad i punkten $(1, -2)$, den är sluten och begränsad och därför också kompakt, den är sammanhängande men inte öppen, randpunkterna är cirkeln. M_4 är öppen, sammanhängande och begränsad men inte sluten och inte kompakt. OBS: jag ritar inga bilder här, men ni måste rita alla dessa mängder - viktigt!!!

5. M är varken öppen eller sluten. Rita figur så ser ni randpunkter och inre punkter. Randpunkter: $\{(x, y); y - 2x = 1, x^2 - 3y < 2, 2x + 4y < 5\} \cup \{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y = 2, 2x + 4y < 5\} \cup \{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y < 2, 2x + 4y = 5\}$. Inre punkter: $\{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y < 2, 2x + 4y < 5\}$

6. En linje.

7. $(2, 2)$

8. $r'(t) = (1/\sqrt{2t}, 2t)$ och $r'(2) = (1/2, 4)$.

9. $y = e^x$

10. $(1 + 2t, 2 + 3t)$

11. $-1/2$

12. $\sqrt{2}$

13. 1 – standardgränsvärde från förra kursen!

14. Saknas

15. 0

16. Ja, sätt $f(0,0) = 0$.

17. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 7,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y, \quad \dfrac{\partial g}{\partial x} = 7y,\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 7x$

$\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2y}},\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1+x^2y}}.$

18. 2, 3, ja, (2 3), ja.

19. En linjär avbildning är sin egen linjarisering!

20. $z = 3 + 2(x-1) + 8(y-2)$ eller om man vill flytta om termerna $2x + 8y - z - 15 = 0$.

21. $5x - 2y - z - 1 = 0$

22. $2x - 3y - z + 7 = 0$

23. $11x + 8y + 7z - 21 = 0$

24. $(2, 1, -1)$

25. $(2x,\ 6y)$

26. Differentierbar (och därmed också kontinuerlig) i alla punkter i hela $\mathbb{R}^2$.

27. $(2x,\ 2y,\ -2z\sin(z^2+1))$

28. Differentierbar (och därmed också kontinuerlig) i alla punkter i $\mathbb{R}^3$.

29. a. Ja. b. Nej. c. Ja. d. Nej.

30. $(3,3)$

31. $21/5$

32. $4/5$

33. I riktning $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

34. I riktning $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

35. $J_f = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 2x_2 & 0 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \end{pmatrix}$. Den linjära avbildning som bäst approximerar f i närheten av $(1,1,1)$ ges av multiplikation med matrisen $\begin{pmatrix} e & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dvs

$$f(x,y,z) \approx \begin{pmatrix} e+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

36. $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$ och $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x$. $(g \circ f)'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t - 2\cos t \sin t$

37. $J_F = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $J_G = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$. I punkten $(1,1,1)$ blir den första matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ och i punkten $F(1,1,1) = (1,9)$ blir den andra matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & -18 \end{pmatrix}$ så matrisen för $G \circ F$ i $(1,1,1)$ fås när man multiplicerar dessa matriser. Man får $\begin{pmatrix} 38 & 56 & 74 \\ -34 & -52 & -70 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

39. $f(x,y,z) \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$

40. Matrisen blir $\begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \end{pmatrix}$ med determinant $= r$ som är skilt från 0 utom när $r = 0$. Matrisen är inverterbar när $r \neq 0$.