

Extra uppgifter på differentialkalkyl del 2

SF1621 Analytiska metoder och linjär algebra 2 för OPEN och T

Funktionalmatriser, inversa och implicita funktioner

1. Bestäm Jacobimatrisen till funktionen $f(r, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$. Vad är determinanten av denna matris? Är matrisen inverterbar? Är f inverterbar?
2. Har avbildningen $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$ någon invers i en omgivning av punkten $(1, 0)$? Har avbildningen $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3e^y \\ x^4 + e^{5y} \end{pmatrix}$ någon invers i en omgivning av punkten $(1, 0)$? Finns det något samband mellan dessa båda avbildningar?
3. Visa att x , y och z i närheten av punkten $(1, 1, 1, 1, 1)$ kan lösas ut som funktioner av u och v i ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

och beräkna $\frac{\partial y}{\partial u}$ i punkten $(u, v) = (1, 1)$.

Taylorutveckling

4. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0, 0)$ till funktionen $f(x, y) = \frac{1}{2 + xy^2}$.
5. Låt $f(x, y) = xy + \ln(1 + xy)$. Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen f i origo.

6. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(2, 0)$ till funktionen $f(x, y) = e^{xy} + x^2 + 2xy^3 + 3y$.

Kritiska punkter, lokala extrempunkter, optimering

7. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
8. Låt $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$. Bestäm alla kritiska punkter till f .
9. Bestäm alla lokala extremvärden till funktionen $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 1$.
10. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = e^{-2y^2-4xy-x^4}$. Bestäm dessa punkters karaktär (lokalt max, lokalt min eller sadelpunkt).
11. En rektangulär (rätvinklig) låda utan lock ska ha volymen $4 m^3$. Vad ska lådan ha för mått om man vill att det ska gå åt så lite material som möjligt?
12. Postens bestämmelser säger: summan av höjden och den horisontella omkretsen av ett s.k. F-paket (ny uppfinning, F:et kommer från upphovsmanen, en viss hr Filipsson) får icke överstiga 100 cm. Hur stor volym kan ett rektangulärt F-paket maximalt ha?
13. Finn minsta värdet av $f(x, y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ i första kvadranten (dvs i området $x > 0, y > 0$). Hur vet du att ett minsta värde finns?
14. Finn alla lokala extremvärden till funktionen $f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2$. Finns det några globala extremvärden?
15. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x + x^2 + y^2$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$.
16. Finn största värdet av $f(x, y) = xy - x^3y^2$ på kvadraten $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
17. Använd Lagranges metod för att maximera x^3y^5 under bivillkoret $x+y = 8$

18. Finn de punkter på kurvan $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ som ligger på störst respektive minst avstånd från origo.
19. Bestäm arean av den största likbenta triangel som kan skrivas in i enhetscirkeln.
20. Bestäm största värdet av $x + y^2 + z$ på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.