KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2007 för Öppen Ingång

Grupparbete till lektionspass L8, 14/11.

(1) Visa att
$$\frac{1}{2} < \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+1)^2} < 1.$$
Tips: Dela integrationsintervallet i fyra lika stora delar och stäng in integranden mellan lämpliga trappfunktioner.

(2) Uppgift 6.8 i *Övningar i Analys i en variabel*

(3) Uppgift 6.9 i *Övningar i Analys i en variabel*

(4) (Ett bevis för Differential- och Integralkalkylens huvudsats.)
Om f är en kontinuerlig funktion och $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, där a är en konstant, förklara varför
$$S'(x) = f(x).$$
Ett tips är att börja med att utifrån en figur som den i föregående uppgift motivera varför $S(x + \Delta x) - S(x) \approx f(x)\Delta x$.

Kommentar. Från huvudsatsens påståeende att $S(x)$ definierad som ovan är en primitiv funktion till $f(x)$ kan man sedan bevisa insättningsformeln $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, där F är en godtycklig primitiv till f (se t ex Persson-Böiers sid 298)

(5) Betrakta det område som bestäms av olikheterna $x > 0$ och $0 < y < \frac{1}{x^2+1}$. Har området en ändlig area? (Uppgiften kan lösas på minst två olika sätt)

(6) (Ett annat sätt att se på insättningsformeln)
Antag att vi känner funktionen F:s värde i punkten $x = a$, och att vi också känner värdet av funktionens derivata i punkter x, $a < x < b$. (I övrigt är funktionen F okänd.) Utifrån detta vill vi beräkna funktionsvärdet $F(b)$.

Det verkar rimligt att vi kan rekonstruera grafen $y = F(x)$: Vi vet att vi ska starta i punkten $(a, F(a))$ och sedan hela tiden röra oss åt höger i en riktning som i varje punkt ges av derivatan (som antogs vara känd).

Mer precist kan man göra så här:

(a) Dela intervallet $[a, b]$ i n st. delinterval med hjälp av punkter

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(b) Om $\Delta x_0 = x_1 - x_0$ är litet kan man hävda att

$$F(x_1) \approx F(x_0) + F'(x_0)\Delta x_0 = F(a) + F'(x_0)\Delta x_0$$

Varför då?

(c) På samma sätt kan man hävda att

$$F(x_2) \approx F(x_1) + F'(x_1)\Delta x_1$$

om $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ är litet. Alltså är då

$$F(x_2) \approx F(a) + F'(x_0)\Delta x_0 + F'(x_1)\Delta x_1.$$

(d) Genom att upprepa detta resonemang kommer vi fram till att

$$F(b) = F(x_n) \approx F(a) + F'(x_0)\Delta x_0 + F'(x_1)\Delta x_1 + \cdots + F'(x_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

vilket också kan skrivas som

$$F(b) - F(a) \approx \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)\Delta x_k \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

eftersom mittenledet är en Riemannsumma till $f(x) = F'(x)$ på intervallet (a, b).