KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2007 för Öppen Ingång

Inlämningsuppgift

Denna inlämningsuppgift ger maximalt 2 poäng att addera till tentamenskrivningens B-del. Poängen utfaller först då ett godkänt resultat redan har uppnåtts. Skriftliga lösningar lämnas senast måndagen 19/11. Förutom den skriftliga lösningen krävs också att du muntligen kan redogöra för dina lösningar vid lektionstillfället 30/11, 13.15 - 15.00. De skriftliga lösningarna kan inte kompletteras vare sig vid det muntliga tillfället eller på annat sätt.

Vid bedömingen kommer att fästas vikt såväl vid det matematiska innehållet som vid själva presentationen. Skriv tydligt och strukturerat. Det går bra att lämna handskrivna lösningar. Lösningarna skall vara fullständiga och skrivna så att de går att läsa som en löpande text av någon med förkunskaper motsvarande dina egna. Att motivera och förklara är lika viktigt som att räkna. Satser ur kurslitteraturen får användas, men du ska naturligtvis tala om vilka satser du använder. Att kopiera andras arbeten, eller lösningar ur andra läroböcker etc, är absolut inte tillåtet och betraktas som fusk.

Kom ihåg att skriva namn och personnummer på alla blad du lämnar in.

Bakgrund

I läroboken (Persson och Böiers, *Analys i en variabel*) definieras först potenser och sedan logaritmer (se kapitel 1.6 och 1.7) på ett sätt som inte är logiskt fullständigt. Det preciseras aldrig vad som ska menas uttrycket a^b om b är ett reellt icke-rationellt tal. Därmed vilar också defintionen av logaritmer på lösa grunder. Bokens framställning kan kompletteras på denna punkt, men det är inte helt lätt.

Det finns en alternativ approach där man istället *börjar* med att definiera naturliga logaritmer, och sedan utifån denna definition går vidare och definierar talet e, exponentialfunktionen och sedan andra potenser och logaritmer. Denna inlämningsuppgift tar ett par inledande steg på denna väg.

Uppgifter

Förutsättningen för uppgifterna nedan är alltså att exponentialfunktioner, logaritmer och potenser med icke-rationella exponent är odefinierade begrepp, de "vanliga räknelagarna" för dessa är med andra ord att betrakta som okända.

Definiera funktionen $L(x)$ för $x > 0$ genom

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^x \frac{1}{s}\, ds.$$

(1) Visa att funktionen $L(x)$ är inverterbar. Bestäm också inversens definitionsmängd och skissera inversens graf.

(2) Låt $E(x)$ beteckna inversen till $L(x)$. Visa att $E(x)$ är en deriverbar funktion som uppfyller villkoren

$$\begin{cases} E'(x) = E(x) \\ E(0) = 1 \end{cases}$$

Du kommer senare när du läser mer om differentialekvationer att se att dessa två villkor bestämmer funktionen unikt och fullständigt, dvs det finns en och bara en funktion som uppfyller dessa två villkor. Följaktligen är $E(x)$ och $L(x)$ logiskt fullständigt definierade versioner av vad vi vill mena med e^x och $\ln x$.

Kommentarer

Nästa steg i detta program för att sätta logaritmer, potenser och exponetialfunktioner på säker mark är att visa, fortfarande utgäende ifrån deinfitionen ovan, att de räknelagar vi vill ska gälla faktiskt gäller, dvs det gäller att bevisa att

i. $L(xy) = L(x) + L(y), \quad \forall x, y > 0;$
ii. $L(x/y) = L(x) - L(y), \quad \forall x, y > 0;$
iii. $L(x^r) = rL(x), \quad \forall x > 0, \forall r \in \mathbb{R};$
iv. $E(x + y) = E(x)E(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
v. $E(x - y) = E(x)/E(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
vi. $E(rx) = [E(x)]^r \quad \forall x, r \in \mathbb{R}.$

Pröva gärna att genomföra detta (men det är inget som krävs på denna inlämningsuppgift).

Med detta avklarat kan man sedan gå vidare att definiera

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{a \ln x}$$

och dess invers $\log_a x$, samt härleda potens- och logaritmlagar för dessa ...