KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2007 för Öppen Ingång

Extra övningsuppgifter på bestämda integraler

(1) Beräkna följande integraler

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^0 x^3\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^8 x^{-1/3}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{4t}\,dt$ e) $\displaystyle\int_1^e s^{-1}\,ds$

(2) Beräkna de bestämda integralerna

$$I_1 = \int_0^1 \sin\frac{\pi x}{4}\,dx,\quad I_2 = \int_{-1}^1 \sin\frac{\pi x}{4}\,dx,\quad I_3 = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{4}\,dx \quad \text{och} \quad I_4 = \int_{-1}^1 \cos\frac{\pi x}{4}\,dx.$$

(3) I föregående uppgift hade man kunnat konstatera direkt, utan beräkningar, att $I_2 = 0$ och att $I_4 = 2I_3$. Förklara!

Exempel. Räkna först uppgift 5.7 i Persson-Böiers *Övningar i analys i en variabel.* När man vill beräkna bestämda integraler med substitutioner finns det flera olika varianter på “metod-tänk” (den matematiska idén är densamma). Vi illusterar detta med ett exempel.

Vi beräknar $\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx$ och visar tre olika sätt att genomföra kalkylen.

(I)

$$\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx = \left\{\text{Vi “ser” direkt att } e^{x^2} \text{ är en primitiv}\right\} = \left[e^{x^2}\right]_0^3 = e^9 - 1.$$

(II)

$$\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx$$
$$= \left\{\text{Vi substituerar } t = x^2, \text{ vilker ger } dt = 2x\,dx. \text{ Nya gränserna beräknas ej}\right\}$$
$$= \int_*^{**} e^t\,dt = \left[e^t\right]_*^{**} = \left\{\text{Återsubstitution } t = x^2\right\} = \left[e^{x^2}\right]_0^3 = e^9 - 1.$$

(III)

$$\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx$$
$$= \left\{\text{Vi substituerar } t = x^2\text{, vilker ger } dt = 2x\,dx\text{. Nya gränser: } t(0) = 0,\ t(3) = 9\right\}$$
$$= \int_0^9 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^9 = e^9 - 1.$$

Syftet med exemplet ovan, och med nästa uppgift, är att illustera hur substitutioner i bestämda integraler kan hanteras. I praktiskt bruk är det naturligtvis så att om man direkt "ser" den primitiva funktionen så behöver man inte genomföra substitutionen; substitutioner är ett verktyg då man *inte* ser precis vad primitiven är.

---

(4) Beräkna nu följande två integraler. Genomför kalkylen på de tre sätt som exemplifieras ovan för de bägge integralerna.

$$\text{a)} \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2\,dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 \frac{3u^2}{u^3+1}\,du$$

(5) Beräkna följande bestämda integraler

$$\text{a)} \quad \int_{-1}^1 e^{3x}\left(1+e^{3x}\right)^2\,dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

(6) Beräkna följande bestämda integraler. (Jfr Uppgift 5.16 i Persson-Böiers)

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt \quad \text{b)} \quad \int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx \quad \text{c)} \quad \int_{-2}^{-1/2} \frac{w}{\sqrt{2w+5}}\,dw$$

(7) Beräkna följande bestämda integraler.

$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi} x\sin x\,dx \quad \text{b)} \quad \int_1^e x\ln x\,dx \quad \text{c)} \quad \int_0^1 \arctan u\,du$$
$$\text{d)} \quad \int_{-1}^1 t^2e^t\,dt \qquad \text{e)} \quad \int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$$

(8) Beräkna följande bestämda integraler.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{2x^2-5x-1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$ d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{8x^2-4x+7}{(x^2+1)(4x+1)}\,dx$

Svar och tips

1. a) $1/4$ b) $-1/4$ c) $9/2$ d) $15/4$ e) 1

2. $I_1 = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$, $I_2 = 0$, $I_3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$, $I_4 = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}$

3. Utnyttja att sinus och cosinus är udda respektive jämna funktioner

4. a) 0 b) $\ln 2$

5. a) $\dfrac{e^3}{3} + \dfrac{e^6}{3} + \dfrac{e^9}{9} - \dfrac{e^{-3}}{3} - \dfrac{e^{-6}}{3} - \dfrac{e^{-9}}{9}$ b) 4

6. a) $\arctan e - \pi/4$ b) $116/15$ c) $-4/3$

7. a) π b) $\dfrac{e^2+1}{4}$ c) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$ d) $e - 5/e$ e) $2\pi^2 - 8$

8. a) $\pi/8$ b) $1 - \dfrac{5}{4}\ln 3$ c) $\ln 2$ d) $2\ln 5 - \pi/4$