SF1622 Lappskrivning 1 7/11 2007

Lösningsförslag (Version A) och svar (Version B)

(1.) $y(x) = \arctan x^3 \Rightarrow y(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\Downarrow$$

$$y'(x) = \frac{1}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{3}{2}.$$

Sökt tangent går igenom punkten $(1, \pi/4)$ med lutning $3/2$. Enpunktsformeln ger

$$(y - \pi/4) = \frac{3}{2}(x-1) \iff 2y - 3x = \frac{\pi}{2} - 3$$

SVAR: $2y - 3x = \frac{\pi}{2} - 3$

SVAR: B-version $\boxed{y - x = \frac{\pi}{4} - 1}$

(2.) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad x > 0$

- $f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$
- $f(x) < 0$ på $(0,1)$, $f(x) > 0$ på $(1,\infty)$

Derivatastudier

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \iff 1-2\ln x = 0 \iff \ln x = \tfrac{1}{2} \iff x = e^{1/2}$$

Teckentabell f'

	0		$e^{1/2}$	
$1-2\ln x$		$+++$	0	$----$
x^3		$+++++$		$++++$
f'		$++$	0	$---$
f		$\nearrow$		$\searrow$

$\Longrightarrow$

- $e^{1/2}$ är enda lokala extrempunkt, ett lokalt maximum
- f växande på $(0, e^{1/2})$
- f avtagande på $(e^{1/2}, \infty)$

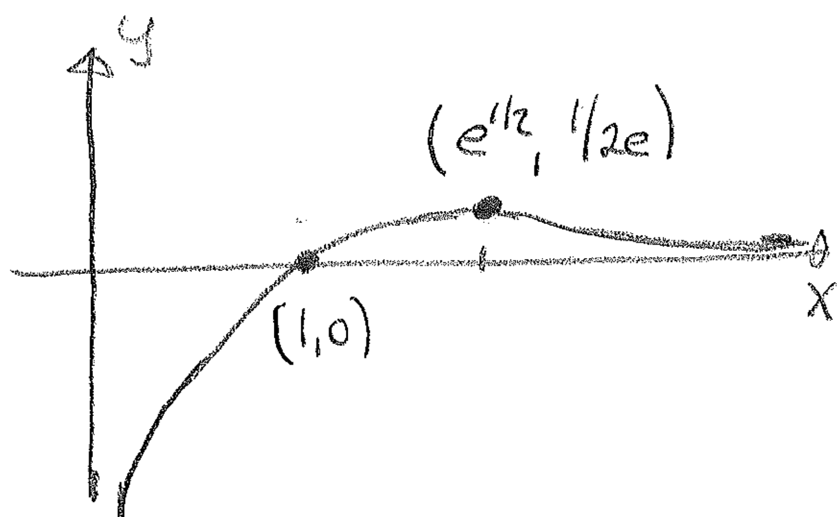
Gränsvärden

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\to 0+}{x^2}} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \ \left(\begin{matrix}\text{std.} \\ \text{gr.vä.}\end{matrix}\right)$$

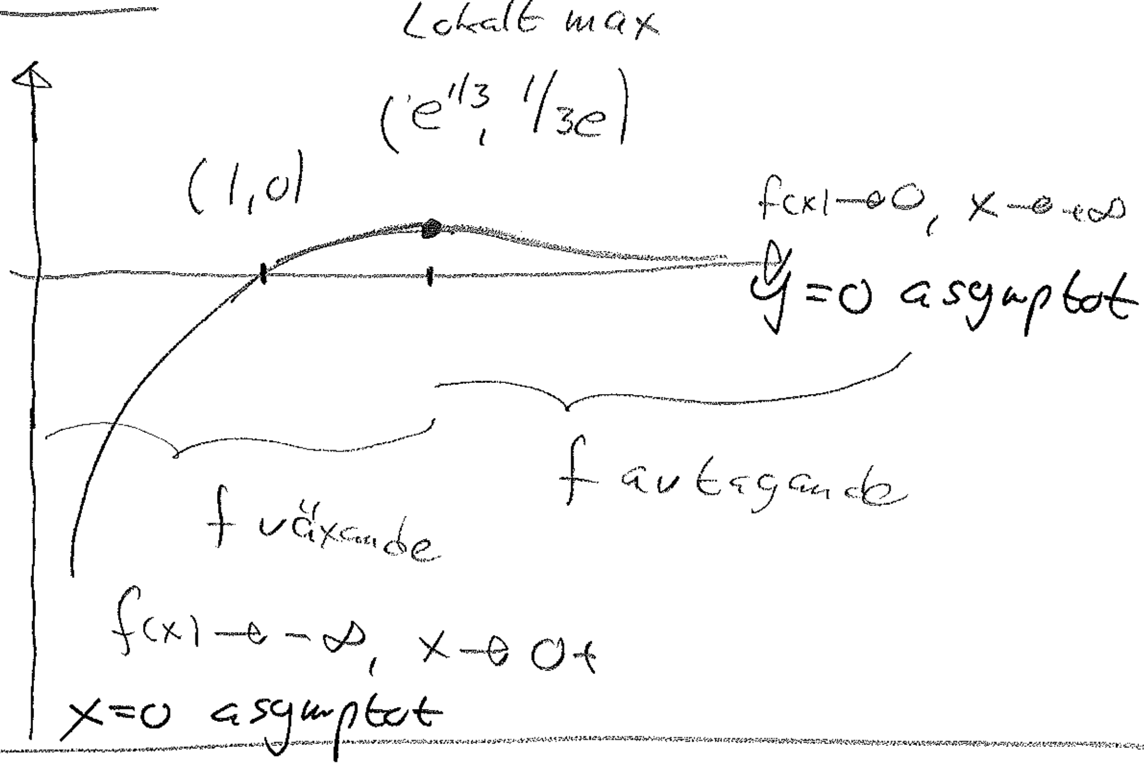
dvs $x=0$ asymptot, dvs $y=0$ asymptot

Några funk.värden

x	$f(x)$
1	0
$e^{1/2}$	$\frac{\ln e^{1/2}}{(e^{1/2})^2} = \frac{1}{2e}$



(2) <u>SVAR</u>
<u>B-version</u>:



(3.) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{1 - \cos 2x}$

Maclaurinutvecklingen:

$e^x = 1 + x + x^2 B_1(x) \Rightarrow xe^x = x + x^2 + x^3 B_1(x)$

$\sin x = x + x^3 B_2(x)$

$\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + t^4 B_3(t) \Rightarrow \cos 2x = 1 - \dfrac{4x^2}{2} + x^4 B_4(x)$

Alltså är

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3 B_1(x) - x - x^3 B_2(x)}{1 - (1 - 2x^2 + x^4 B_4(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 B_5(x)}{2x^2 + x^4 B_6(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1 + \overbrace{x B_5(x)}^{\to 0})}{\cancel{x^2}(2 + \underbrace{x^2 B_6(x)}_{\to 0})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

<u>SVAR:</u> $1/2$

$\boxed{\text{SVAR: B-version } \quad 9/2}$