KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 11/4 2008 kl 8-13
SF1622/5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del A utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 motsvaras av de tre lappskrivningarna; den som är godkänd på lappskrivning n erhåller automatiskt full poäng på uppgift nr n, och skall alltså inte lösa denna uppgift vid tentamenstillfället.

Del B består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C alt. 4, 5) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter. Under kursens gång har funnits möjlighet att erhålla maximalt 3 B-bonus poäng. Dessa utfaller först då godkänt resultat redan har uppnåtts.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- A och 5: 35 poäng, varav minst 12 B-poäng.
- B och 4: 28 poäng, varav minst 8 B-poäng.
- C och 4: 22 poäng, varav minst 4 B-poäng.
- D och 3: 18 poäng
- E och 3: 16 poäng.
- Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E): 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del A

(1) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 2x}{x-\pi}$$

(2) Beräkna integralerna

$$\text{a)} \quad \int_{1/e}^{e} \ln x\, dx \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$$

och förenkla svaren så långt som möjligt.

(3) Bestäm alla lösningar $y(x)$ till differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 13y = 100e^{2x}.$$

(4) Hur många lösningar har ekvationen $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$?

(5) Betrakta serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$
a) Beräkna partialsumman
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \qquad \text{(2 p)}$$
b) Avgör om serien är konvergent eller inte. (2p)

(6) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 5x + 2z - w = 9 \\ 2x + y = 2 \\ 2x + z - w = 4 \\ 4x + y + 2w = 4 \end{cases}.$$

Del B

(7) Skissera kurvan $y = e^{-x^2/2}$ och ange alla extrempunkter och asymptoter. Ange också var kurvans lutning är som störst.

(8) Bestäm det kortaste avståndet mellan de två planen $3x + y + 2z = 6$ och $6x + 2y + 4z = 10$.

(9) Ange ett intervall av längd högst $1/100$ som säkert innehåller talet $\sin 1$. Tips: Maclaurinutveckla $\sin x$.

(10) Till en tank som rymmer 1ℓ har det anslutits två rör. Genom det ena strömmar det in vätska i tanken med en tidsberoende hastighet $i(t) = \dfrac{1}{4t^2+1}\ell/s$ för $t > 0$, och genom det andra strömmar det ut vätska med den tidsberoende hastigheten $u(t) = \dfrac{1}{(2t+1)^2}\ell/s$ för $t > 0$. Variabeln t är en tidsvariabel med enheten s (sekunder). Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. Bestäm den funktion $V(t)$ som beskriver hur mycket vätska tanken innehåller vid tiden $t > 0$. Avgör också om tanken vid något tillfälle kommer att vara full, och i sådana fall när detta inträffar.