Patrik Svanström, IT1 och Fredrik Östling, IT1

Algebra och geometri SF1624 - Matlablaboration

2007-12-06

Kurs: SF1624
Handledare: Karim Daho

Innehållsförteckning

Uppgift 3.19[1]

Ett litet kraftverksbolag undersöker om det är lönsamt att bygga ett kraftverk vid en å med vattenföringen X_D m^3/s. Man känner ej X_D, men naturvårdsverket har tidigare gjort mätningar som visar att X_D måste uppfylla följande ekvationer:

$12 = X_A + X_B$
$2 + X_B = 12 + X_C$
$X_C + 16 = X_D + 2$
$X_A + X_D = 16$

där X_A, X_B och X_C är andra okända vattenflöden. På grund av de topografiska förhållandena vet man att X_A, X_B, X_C *och* X_D samtliga är positiva. Om vattenföringen X_D är minst 15 m^3/s anser man det vara lönsamt att bygga ett kraftverk. Skall man med utgångspunkt från de gjorda mätningarna skrinlägga projektet, genomföra det eller företa direkt mätningar av X_D?

Lösningsförslag till uppgift 3.19

Uppgiften går alltså ut på att lösa ut X_D. Ett sätt att göra detta på är t.ex. att använda gausselimination. Då är första steget att skriva om ekvationssystemet på en lämpligare form. En lämplig form är vanligtvis att samla alla okända på den vänstra sidan och värdena på den högra sidan. Omskrivning av ekvationssystemet ger:

$X_A + X_B = 12$
$X_B – X_C = 10$
$X_C – X_D = -14$
$X_A + X_D = 16$

För att kunna gausseliminera behövs en s.k. totalmatris för ekvationssystemet. Den fås genom att sätta X_A, X_B, X_C *och* X_D samt svaret för respektive ekvation på samma rad. Kolumnerna i totalmatrisen är i ordningen: X_A, X_B, X_C, X_D samt svaret till varje ekvation i den sista kolumnen. T.ex. skulle första ekvationen ($X_A + X_B = 12$) ha två ettor och två nollor på vänstra sidan samt värdet 12 på högra sidan. De två ettorna skall vara i totalmatrisen eftersom det finns $1*X_A$ och $1*X_B$ i ekvationen. De två nollorna skall vara där eftersom ekvationen har $0*X_C$ och $0*X_D$, dvs. inga X_C eller X_D. Totalmatrisen för ekvationssystemet ser ut enligt följande:

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right\rangle$$

Denna totalmatris kan nu användas för gausseliminering. Antingen gör man det för hand med s.k. radoperationer, eller så använder man en inbyggd funktion i Matlab som gör exakt samma sak. Denna matris matas in i Matlab och kommandot ”rref” som står för ”reduced row echelon form” utför gausselimineringen. De okända (X_A, X_B, X_C *och* X_D) sätts till en matris *A* och

[1] Andersson, L. m.fl., (1999), s. 219.

svaren för varje ekvation sätts till en matris *b*. Detta är allt som krävs för att kunna använda kommandot för gausseliminering som görs enligt följande i Matlab:

```
A = [1 1 0 0; 0 1 -1 0; 0 0 1 -1; 1 0 0 1];
b = [12; 10; -14; 16];
rref([A b]) %Gausselimination
```

Detta returnerar:

ans =

1	0	0	1	16
0	1	0	-1	-4
0	0	1	-1	-14
0	0	0	0	0

Tydligen uppstod en nollrad (alla komponenter i en rad är 0) i totalmatrisen och det kommer alltså att bli en parameterlösning som svar. Om en nollrad uppstår som resultat efter gausseliminering kan man vara säker på att det kommer att bli en parameterlösning. Totalmatrisen ser ut enligt följande utan nollraden:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -14 \end{array}\right\rangle$$

Matlab har nu utfört gausselimineringen vilket är det mest krävande i denna uppgift. Det som återstår nu är endast att skriva om ekvationssystemet och sätta en parameter. Återsubstitution (dvs. totalmatrisen skrivs på ekvationsform) ger ekvationssystemet:

$X_A + X_D = 16$
$X_B – X_D = -4$
$X_C – X_D = -14$

Om X_D och alla värden sätts på högra sidan så kan detta skrivas om som:

$X_A = 16 – X_D$
$X_B = X_D – 4$
$X_C = X_D – 14$

X_D sätts sedan till t (en parameter):

$X_A = 16 – t$
$X_B = t – 4$
$X_C = t – 14$
$X_D = t$

Ovanstående ekvationssystem används för att få fram det slutliga svaret, dvs. värdet på X_D. För att få fram värdet på X_D måste informationen i uppgiften användas. Det var givet att X_A, X_B, X_C *och* X_D samtliga är positiva. Detta gör att det går att få fram ett villkor på t (X_D).

Om t är mindre än 14 så kommer X_C att bli negativ, vilket den inte är enligt uppgiften. Detta innebär att t måste vara större än eller lika med 14. På liknande sätt kommer X_A bli negativ om t är större än 16. Detta ger följande villkor: $14 \leq t \leq 16$, dvs. $14 \leq X_D \leq 16$. Detta är svaret till uppgiften. Det gick inte att bestämma X_D exakt med informationen i uppgiften. Det gick endast att få ett villkor på den.

Svar: I uppgiften var det givet att X_A, X_B, X_C och X_D samtliga är positiva. För att det ska gälla måste följande villkor gälla: $14 \leq X_D \leq 16$. Resultatet innebär att det inte är säkert att X_D är minst 15 m^3/s. Noggrannare beräkningar för att fastställa det exakta värdet på X_D rekommenderas.

Kommentarer: I denna uppgift var det en klar fördel att använda Matlab. Gausselimineringen tog endast en bråkdel av en sekund att utföra, vilket är mycket snabbare än att göra den för hand. Uppgiften gick alltså ut på att lösa ut X_D. Först skrevs ekvationssystemet om på totalmatrisform och sedan utfördes gausseliminering m.h.a. Matlab. Därefter skrevs ekvationssystemet om igen och X_D sattes till en parameter. Detta gav sedan svaret ovan.

Uppgift 3.51[2]

Ingenjör S Karlsson avläste under några dagar vattenmätaren i sin nya villa och erhöll därvid följande värden.

Den 1 mars kl. 18.00:	5100 liter
Den 3 mars kl. 12.00:	5600 liter
Den 7 mars kl. 22.00:	7800 liter
Den 10 mars kl. 10.00:	8500 liter

Familjen Karlssons vattenförbrukning per dygn kan antas vara approximativt konstant. Bestäm med minstakvadratanpassning familjen Karlssons vattenförbrukning per dygn samt när de flyttade in i sin villa (vattenmätaren antas då ha visat 0 liter).

Lösningsförslag till uppgift 3.51

I uppgiften är det givet 4 värden för 4 olika tidpunkter. Uppgiften går ut på att först bestämma vattenförbrukningen per dygn och sedan när de flyttade in i sin villa. Genom att göra om tidpunkterna till timmar och sedan till dygn (jämfört med startvärdet 1 mars kl 18.00) kan vattenförbrukningen per dygn fås. Den första tidpunkten sätts alltså till startvärde 0.

Den 1 mars kl. 18.00 → 0 dygn
Den 3 mars kl. 12.00 → 6 + 24 + 12 = 42h = 42/24 dygn
Den 7 mars kl. 22.00 → 42 + 12 + 24 + 24 + 24 + 22 = 148h = 148/24 dygn
Den 10 mars kl. 10.00 → 148 + 2 + 24 + 24 + 10 = 208h = 208/24 dygn

Dessa värden tillsammans med antalet liter som var givet för varje punkt i uppgiften kan nu användas. Tidpunkterna är omskrivna till antal dygn vilket behövs för att beräkna vattenförbrukningen per dygn (liter/dygn). I uppgiften var det givet att vattenförbrukningen per dygn kunde antas vara konstant. Därför antas ekvationen vara linjär, dvs. ha formen $y = kx + m$. Värdena för x och y är kända i uppgiften, alltså ska endast k och m lösas ut. Ekvationssystemet blir följande:

k*0 + m = 5100
k*42/24 + m = 5600
k*148/24 + m = 7800
k*208/24 + m = 8500

Ekvationssystemet skrivs på matrisformen Ax = b där:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 42/24 & 1 \\ 148/24 & 1 \\ 208/24 & 1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} 5100 \\ 5600 \\ 7800 \\ 8500 \end{pmatrix}$$

[2] Andersson, L. m.fl., (1999), s. 226.

Ekvationen Ax = b har ingen lösning eftersom systemet är överbestämt. För att beräkna detta för hand skulle normalekvationerna behövas, dvs. $A^tAx = A^tb$. Men i Matlab finns s.k. vänsterdivision[3] som löser Ax = b. Detta används för att underlätta beräkningarna.

Matlab löser alltså detta enkelt med vänsterdivision (x = A\b):

```
A = [0 1; 42/24 1; 148/24 1; 208/24 1];
b = [5100; 5600; 7800; 8500];
x = A\b
```

Detta returnerar:

x =

  1.0e+003 *

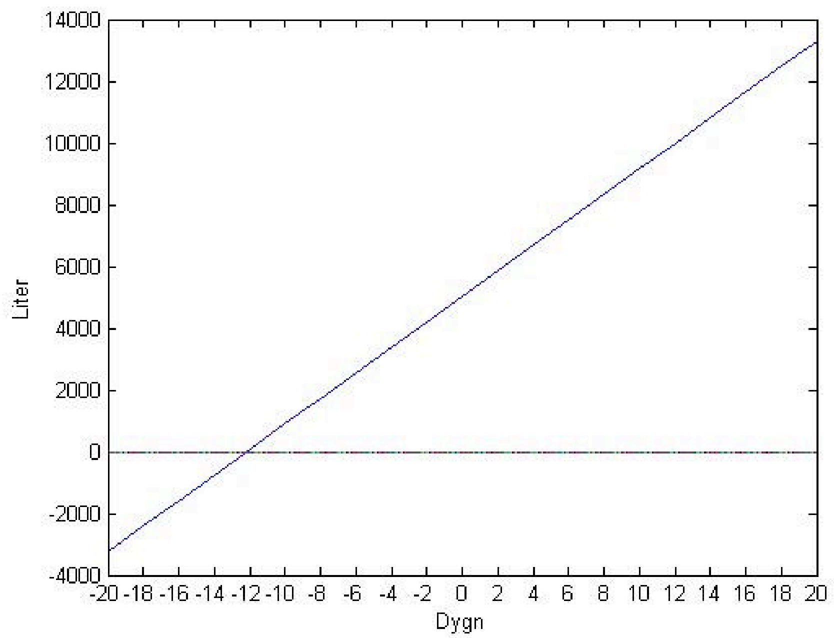
    0.4137
    5.0349

Svaret blev alltså $x = \begin{pmatrix} 0.4137*10\hat{}3 \\ 5.0349*10\hat{}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 413.7 \\ 5034.9 \end{pmatrix}$

Värdena för k och m utläses till k = 413.7 och m = 5034.9. Ekvationen är alltså på formen:
y = 413.7x + 5034.9

Delsvar: Vattenförbrukningen per dygn är alltså *k* som enligt minstakvadratmening är 413,7 liter/dygn.

För att lösa andra delen av uppgiften, alltså att bestämma när familjen Karlsson flyttade in i sin villa, analyseras den linjära ekvationen m.h.a. en graf. De flyttade in när linjen skär y = 0 eftersom det var då antalet liter var 0, dvs. då de flyttade in enligt uppgiften.



3 http://www.tfe.umu.se/courses/elektro/matlab/matris/matris.html

Det var alltså givet i uppgiften att familjen Karlsson flyttade in när vattenmätaren visade 0 liter. Enligt grafen är detta värdet på x när y = 0, vilket enligt grafen är x ≈ -12. Detta innebär att inflyttningsdatumet är 12 dagar före 1 mars kl. 18.00 (startvärdet). Eftersom februari kan innehålla antingen 28 eller 29 dagar p.g.a. att 29 februari kan vara en skottdag, finns det två möjliga svar till denna uppgift. Enkel beräkning ger att familjen Karlsson flyttade in antingen den 17:e eller 18:e februari beroende på om det var skottår eller inte.

Svar: Vattenförbrukningen per dygn är enligt minstakvadratmening 413,7 liter/dygn samt familjen Karlsson flyttade in antingen den 17:e eller 18:e februari beroende på om det var skottår eller inte.

Kommentarer: Se bilaga för att se hur grafen fås fram med hjälp av kommandot plot. Vänsterdivision som användes i uppgiften är mycket användbart; ekvationer kan lösas mycket snabbare och man slipper normalekvationerna när systemen är överbestämda. Summering: uppgiften gick alltså ut på att först lösa ut k och m i ekvationen $y = kx + m$, där k gav ett av svaren på uppgiften. Detta gjordes genom att använda vänsterdivision på det överbestämda systemet. Därefter analyserades grafen med den linjära ekvationen för att få fram tidpunkten när familjen Karlsson flyttade in.

Uppgift 3.58[4]

Anpassa följande data till sambandet $y = a\ ln\ bx$ med hjälp av omskrivningen i övning 3.57d

x:	1	2	3	4	5
y:	2.2	3.6	4.4	5.0	5.4

Lösningsförslag till uppgift 3.58

Enligt övning 3.57d i kursboken är omskrivningen som ska användas: $y = a\ ln\ bx$ ⇔
$y = a \ln b + a \ln x$

För att anpassa given data bör ekvationssystem först ställas upp. Ekvationssystemet ställs upp enligt följande:

a ln b + a ln 1 = 2.2
a ln b + a ln 2 = 3.6
a ln b + a ln 3 = 4.4
a ln b + a ln 4 = 5.0
a ln b + a ln 5 = 5.4

Precis som i föregående uppgift är detta system överbestämt. Vänsterdivision kan användas även här, normalekvationerna behövs alltså inte. Ekvationerna skrivs på matrisform Ax = b där:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \\ 1 & \ln 5 \end{pmatrix}, \mathrm{x} = \begin{pmatrix} a \ln b \\ a \end{pmatrix}, \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 3.6 \\ 4.4 \\ 5.0 \\ 5.4 \end{pmatrix}$$

Matlab används för att beräkna matrisen x med vänsterdivision (x = A\b):

```
A = [1 log(1); 1 log(2); 1 log(3); 1 log(4); 1 log(5)];
b = [2.2; 3.6; 4.4; 5.0; 5.4];
x = A\b
```

Detta returnerar:

x =

2.2072
1.9977

Anmärkning: i Matlab står log för ln och log10 för log, därför står det log i Matlabkoden där det ska vara ln.

[4] Andersson, L. m.fl., (1999), s. 227.

Detta betyder att a ln b = 2.2072 och a = 1.9977. Värdet på b beräknas enligt följande:

a ln b = 2.2072 ➔ 1.9977 ln b = 2.2072 ➔ ln b = 2.2072 / 1.9977 ➔ b = e^(2.2072/1.9977) ≈ 3.02.

Värdet för a och b fås efter avrundning till 2.00 respektive 3.02. Insättning av värdena för a och b i det ursprungliga sambandet ger önskat svar.

Svar: Enligt minstakvadratmening anpassas given data till y = 2.00 + ln3.02x

Kommentarer: Denna uppgift var ungefär likadan som den förra, men det enda som behövde göras var att få fram värdena på a och b.

Uppgift 3.84[5]

Man har gjort experimentella mätningar för att försöka finna en matematisk modell av formen

$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \sin t$

Mätningarna resulterade i följande värden:

t:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y:	6	6	4	1	0	3	10	21	7	4

a) Använd dessa mätvärden till att anpassa en modell i minstakvadratmening. Plotta mätdata tillsammans med en graf av den anpassade funktionen *y(t)*.
b) Av resultaten från uppgift a) kan man misstänka att mätdata innehåller en uteliggare, dvs. ett mätdata som uppenbarligen är helt felaktig. Ta bort den mätdatapunkten och gör om anpassningen och plottningen.

Lösningsförslag till uppgift 3.84

a) Första steget är att ställa upp ekvationssystemet:

$a_1 + a_2*1 + a_3\sin(1) = 6$
$a_1 + a_2*2 + a_3\sin(2) = 6$
$a_1 + a_2*3 + a_3\sin(3) = 4$
$a_1 + a_2*4 + a_3\sin(4) = 1$
$a_1 + a_2*5 + a_3\sin(5) = 0$
$a_1 + a_2*6 + a_3\sin(6) = 3$
$a_1 + a_2*7 + a_3\sin(7) = 10$
$a_1 + a_2*8 + a_3\sin(8) = 21$
$a_1 + a_2*9 + a_3\sin(9) = 7$
$a_1 + a_2*10 + a_3\sin(10) = 4$

Även detta ekvationssystem är överbestämt. Ekvationerna skrivs på matrisform Ax = b där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sin(1) \\ 1 & 2 & \sin(2) \\ 1 & 3 & \sin(3) \\ 1 & 4 & \sin(4) \\ 1 & 5 & \sin(5) \\ 1 & 6 & \sin(6) \\ 1 & 7 & \sin(7) \\ 1 & 8 & \sin(8) \\ 1 & 9 & \sin(9) \\ 1 & 10 & \sin(10) \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 10 \\ 21 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[5] Andersson, L. m.fl., (1999), s. 233.

Detta beräknas i Matlab med vänsterdivision:

```
A = [1 1 sin(1); 1 2 sin(2); 1 3 sin(3); 1 4 sin(4); 1 5 sin(5);
     1 6 sin(6); 1 7 sin(7); 1 8 sin(8); 1 9 sin(9); 1 10 sin(10)];
b = [6; 6; 4; 1; 0; 3; 10; 21; 7; 4];
x = A\b
```

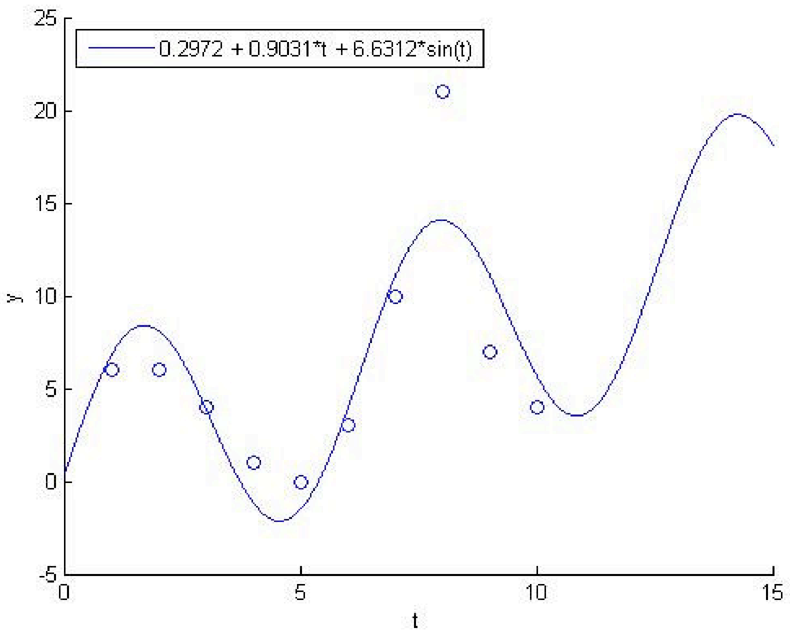
Detta returnerar:

x =

0.2972
0.9031
6.6312

Detta betyder att $a_1 = 0.2972$, $a_2 = 0.9031$ och $a_3 = 6.6312$. Modellen är på formen:
$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \sin t \rightarrow y(t) = 0.2972 + 0.9031t + 6.6312\sin(t)$

Svar a): Modellen är på formen: $y(t) = 0.2972 + 0.9031t + 6.6312\sin(t)$. Kurvan och mätvärdena illustreras m.h.a. en graf som gjorts i Matlab med kommandot plot nedan:



b) Punkten för y = 21 (mätvärde nr. 8) verkar felaktigt. Jämfört med de andra punkterna är den långt bort från kurvan.

Mätvärde nr. 8 tas bort från matriserna i Matlab och då finns 9 mätvärden kvar. Därefter beräknas de nya värdena på a_1, a_2 och a_3:

```
A = [1 1 sin(1); 1 2 sin(2); 1 3 sin(3); 1 4 sin(4); 1 5 sin(5);
     1 6 sin(6); 1 7 sin(7); 1 9 sin(9); 1 10 sin(10)];
b = [6; 6; 4; 1; 0; 3; 10; 7; 4];
x = A\b
```

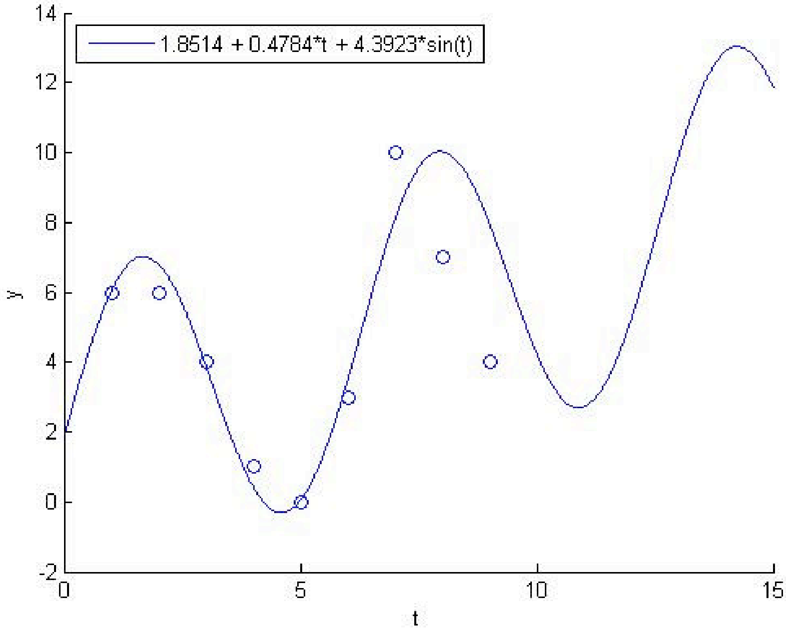
Detta returnerar:

x =

1.8514
0.4784
4.3923

Detta betyder precis som förut att $a_1 = 1.8514$, $a_2 = 0.4784$ och $a_3 = 4.3923$. Alltså är den nya modellen på formen: $y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \sin t \rightarrow y(t) = 1.8514 + 0.4784t + 4.3923\sin(t)$

Svar b) Modellen är på formen: $y(t) = 1.8514 + 0.4784t + 4.3923\sin(t)$. Kurvan och mätvärdena illustreras m.h.a. en graf som gjorts i Matlab med kommandot plot ovan:



Kommentarer: Se bilaga för att se hur graferna fås fram med hjälp av kommandot plot. Grafen i b) har inget mätvärde som avviker lika mycket som ett mätvärde gjorde i a). Detta innebär att grafen i b) är bättre anpassad än grafen i a). Denna uppgift var lite annorlunda från vanliga uppgifter med minstakvadratmetoden eftersom anpassningen inte skulle vara linjär.

Källförteckning

Andersson, L. m.fl., (1999), *Linjär algebra med geometri*, Andra upplagan, Lund, Studentlitteratur

Andersson, Staffan (2001), *INTRODUKTION TILL MATLAB – matrishantering/uh-2001*, http://www.tfe.umu.se/courses/elektro/matlab/matris/matris.html, Publicerat 2001-02-21. Hämtat 2007-12-06.

Bilaga: Matlabkod

```
clear, clc

%
%Uppg 3.19
%

disp('Uppgift 3.19:')
A = [1 1 0 0; 0 1 -1 0; 0 0 1 -1; 1 0 0 1];
b = [12; 10; -14; 16];
rref([A b]) %Gausselimination

%
%Uppg 3.51
%

disp('Uppgift 3.51:')
A = [0 1; 42/24 1; 148/24 1; 208/24 1];
b = [5100; 5600; 7800; 8500];
x = A\b

x = -20:2:20;
y = 413.7*x + 5034.9;
figure(1)
hold on
plot(x, y)
set(gca, 'XTick',[x])
line(-20:0.01:20, 0)
xlabel('Dygn');
ylabel('Liter');

%
%Uppg 3.58
%

disp('Uppgift 3.58:')
A = [1 log(1); 1 log(2); 1 log(3); 1 log(4); 1 log(5)];
b = [2.2; 3.6; 4.4; 5.0; 5.4];
x = A\b

%
%Uppg 3.84
%

disp('Uppgift 3.84:')
A = [1 1 sin(1); 1 2 sin(2); 1 3 sin(3); 1 4 sin(4); 1 5 sin(5);
     1 6 sin(6); 1 7 sin(7); 1 8 sin(8); 1 9 sin(9); 1 10 sin(10)];
b = [6; 6; 4; 1; 0; 3; 10; 21; 7; 4];
x = A\b
figure(2)
hold on
t = 0:0.01:15;
plot(t, 0.2972 + 0.9031*t + 6.6312*sin(t));
legend('0.2972 + 0.9031*t + 6.6312*sin(t)', 'Location', 'NorthWest')
plot(1,b(1), 'o');
plot(2,b(2), 'o');
plot(3,b(3), 'o');
```

```
plot(4,b(4), 'o');
plot(5,b(5), 'o');
plot(6,b(6), 'o');
plot(7,b(7), 'o');
plot(8,b(8), 'o');
plot(9,b(9), 'o');
plot(10,b(10), 'o');
xlabel('t')
ylabel('y')

A = [1 1 sin(1); 1 2 sin(2); 1 3 sin(3); 1 4 sin(4); 1 5 sin(5);
     1 6 sin(6); 1 7 sin(7); 1 9 sin(9); 1 10 sin(10)];
b = [6; 6; 4; 1; 0; 3; 10; 7; 4];
x = A\b
figure(3)
hold on
x = 0:0.01:15;
plot(t, 1.8514 + 0.4784*t + 4.3923*sin(t));
legend('1.8514 + 0.4784*t + 4.3923*sin(t)', 'Location', 'NorthWest')
plot(1,b(1), 'o');
plot(2,b(2), 'o');
plot(3,b(3), 'o');
plot(4,b(4), 'o');
plot(5,b(5), 'o');
plot(6,b(6), 'o');
plot(7,b(7), 'o');
plot(8,b(8), 'o');
plot(9,b(9), 'o');
xlabel('t')
ylabel('y')
```