Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 1A i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Bestäm asymptoterna till funktionen*

$$y = \frac{3x+7}{x-2}, \quad \text{definierad då } x \neq 2,$$

samt använd dessa för att skissera funktionsgrafen.

Lösning: Lodräta asymptoten fås genom att sätta nämnaren $= 0$; det vill säga, den ges av $x = 2$. Och eftersom

$$y = \frac{3x+7}{x-2} = \frac{3(x-2)+13}{x-2} = 3 + \frac{13}{x-2},$$

där

$$\frac{13}{x-2} \to 0 \text{ när } x \to \pm\infty,$$

så är $y = 3$ en vågrät asymptot. Grafen fås genom att obsevera att

$$\lim_{x\to 2+} \frac{13}{x-2} = +\infty, \text{ medan } \lim_{x\to 2-} \frac{13}{x-2} = -\infty.$$

2. *Beräkna inversen till funktionen ovan.*

Lösning:

$$y = \frac{3x+7}{x-2} \iff xy - 2y = 3x + 7 \iff x(y-3) = 2y + 7$$
$$\iff x = \frac{2y+7}{y-3} \text{ då } y \neq 3.$$

3. *De hyperboliska funktionerna definieras av*

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{och} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Visa att

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left\{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^2 - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) \\
&= \cosh 2x.
\end{aligned}$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 1B i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Bestäm asymptoterna till funktionen*

$$y = \frac{2x+7}{x-3}, \quad \text{definierad då } x \neq 3,$$

samt använd dessa för att skissera funktionsgrafen.

Lösning: Lodräta asymptoten fås genom att sätta nämnaren $= 0$; det vill säga, den ges av $x = 3$. Och eftersom

$$y = \frac{2x+7}{x-3} = \frac{2(x-3)+13}{x-3} = 2 + \frac{13}{x-3},$$

där

$$\frac{13}{x-3} \to 0 \text{ när } x \to \pm\infty,$$

så är $y = 2$ en vågrät asymptot. Grafen fås genom att obsevera att

$$\lim_{x\to 3+} \frac{13}{x-3} = +\infty, \text{ medan } \lim_{x\to 3-} \frac{13}{x-3} = -\infty.$$

2. *Beräkna inversen till funktionen ovan.*

Lösning:

$$y = \frac{2x+7}{x-3} \iff xy - 3y = 2x + 7 \iff x(y-2) = 3y + 7$$
$$\iff x = \frac{3y+7}{y-2} \text{ då } y \neq 2.$$

3. *De hyperboliska funktionerna definieras av*

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{och} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Visa att

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$$

Lösning:

$$2 \sinh x \cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$$
$$= \sinh 2x.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 2A i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen*

$$f(x) = 5x^2 + 2x$$

då $-2 \leq x \leq 1$.

Lösning: $f'(x) = 10x+2 = 10\,(x+1/5)$, så $f'(x) = 0 \iff x = -1/5$. Därmed fås följande kandidater till största respektive minsta värde:

$$f(-2) = 20-4 = 16, \quad f(-1/5) = 5\cdot\frac{1}{5^2} - 2\cdot\frac{1}{5} = -1/5 \quad \text{och} \quad f(1) = 7.$$

Så största värdet är $= 16$ då $x = -2$, och det minsta är $= -1/5$ då $x = -1/5$.

2. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

på reell *form.*

Lösning: Från den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \iff r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

ser man att

$$y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

3. *Beräkna den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$y'' + 2y' + 5y = 10x - 1 + 10\cos x.$$

Lösning: Partikulärlösning till $y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$:

$$y_1 = ax + b \Longrightarrow y_1' = a \Longrightarrow y_1'' = 0$$
$$\Longrightarrow 2a + 5ax + 5b = 10x - 1 \iff 5x(a-2) + 5b + 2a + 1 = 0$$
$$\iff a = 2 \text{ och } b = \frac{1}{5}(-4-1) = -1 \Longrightarrow y_1 = 2x - 1.$$

Partikulärlösning till $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$:

$$y_2 = a\cos x + b\sin x \Longrightarrow y_2' = -a\sin x + b\cos x \Longrightarrow y_2'' = -a\cos x - b\sin x$$
$$\Longrightarrow \cos x \cdot (-a + 2b + 5a) + \sin x \cdot (-b - 2a + 5b) = 10\cos x$$
$$\iff \cos x \cdot (4a + 2b - 10) + \sin x \cdot (4b - 2a) = 0$$
$$\iff a = 2b \text{ och } 10b - 10 = 0 \iff b = 1 \text{ och } a = 2$$
$$\Longrightarrow y_2 = 2\cos x + \sin x.$$

SVAR: $y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2x - 1 + 2\cos x + \sin x$.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 2B i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

på reell *form.*

Lösning: Från den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 4r + 5 = 0 \iff r = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$$

ser man att

$$y(x) = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x).$$

2. *Beräkna den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$y'' + 4y' + 5y = 5x + 9 - 8\sin x.$$

Lösning: Partikulärlösning till $y'' + 4y' + 5y = 5x + 9$:

$$\begin{aligned} & y_1 = ax + b \Longrightarrow y_1' = a \Longrightarrow y_1'' = 0 \\ & \Longrightarrow 4a + 5ax + 5b = 5x + 9 \iff 5x(a-1) + 5b + 4a - 9 = 0 \\ & \iff a = 1 \text{ och } b = \frac{1}{5}(9-4) = 1 \Longrightarrow y_1 = x + 1. \end{aligned}$$

Partikulärlösning till $y'' + 4y' + 5y = -8\sin x$:

$$\begin{aligned} & y_2 = a\cos x + b\sin x \Longrightarrow y_2' = -a\sin x + b\cos x \Longrightarrow y_2'' = -a\cos x - b\sin x \\ & \Longrightarrow \cos x \cdot (-a + 4b + 5a) + \sin x \cdot (-b - 4a + 5b) = -8\sin x \\ & \iff \cos x \cdot (4a + 4b) + \sin x \cdot (4b - 4a + 8) = 0 \\ & \iff b = -a \text{ och } -8a + 8 = 0 \iff a = 1 \text{ och } b = -1 \\ & \Longrightarrow y_2 = \cos x - \sin x. \end{aligned}$$

SVAR: $y(x) = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + x + 1 + \cos x - \sin x.$

3. *Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen*

$$f(x) = 6x^2 - x^3$$

då $-1 \leq x \leq 3$.

Lösning: Eftersom

$$f'(x) = 12x - 3x^2 = -3x(x-4) \text{ och } f'(x) = 0 \iff x = \begin{cases} 0, \\ 4 \end{cases},$$

får vi följande kandidater till största och minsta värde:

$$f(-1) = 7, \quad f(0) = 0 \quad \text{och} \quad f(3) = 54 - 27 = 27.$$

Så största värdet är $= 27$ i $x = 3$, och det minsta är $= 0$ då $x = 0$.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 3A i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x/2)^2}} = [\arcsin x/2]_0^1$$
$$= \arcsin(1/2) - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^3\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \cdot \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-(\cos x)^2)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \{u = \cos x,\ du = -\sin x\,dx\} = \int_1^0 (1-u^2)(-du)$$
$$= \int_0^1 (1-u^2)\,du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3.

$$\int \frac{3x-9}{x^2-7x+10}\,dx = ?$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \iff x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-40}{4}} = \frac{7\pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$
$$\implies x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5).$$

Så

$$\int \frac{3x-9}{x^2-7x+10}\,dx = \int \frac{3x-9}{(x-2)(x-5)}\,dx = \{\text{handpåläggning}\}$$
$$= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-5}\right) dx = \ln|x-2| + 2\ln|x-5| + C.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 3B i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx = ?$$

$$x^2-2x-3=0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\implies x^2-2x-3 = (x+1)(x-3).$$

Så

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \{\text{handpåläggning}\}$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3}\right) dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-3| + C.$$

2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+(x/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

3.

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^3\,dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \cdot \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-(\sin x)^2)\cdot \cos x\,dx$$

$$= \{u = \sin x,\ du = \cos x\,dx\} = \int_0^1 (1-u^2)\,du$$

$$= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 4A i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Är serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{3^n}$$

konvergent eller inte? MOTIVERA!!!

Lösning::

$0 \leq (\sin n)^2 \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{(\sin n)^2}{3^n} \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, och den geometriska serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ är konvergent eftersom $|1/3| < 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{3^n}$ är konvergent.

2. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Lösning:

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$
$$= \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \cdots \to \frac{1}{6} \text{ då } x \to 0.$$

3. *Beräkna ett närmevärde till $\sqrt{5}$ och ange hur stor feltermen är på följande sätt:*

   (a) *Uttryck $\sqrt{5}$ som $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4 \cdot (1 + 1/4)} = 2\sqrt{1 + 1/4} = 2\sqrt{1+x}$ med $x = 1/4$.*

(b) *Framställ sedan* $\sqrt{1+x}$ *som ett andra ordningens MacLaurinpolynom plus en restterm.*

(c) *Sätt till slut in* $x = 1/4$.

Lösning: Eftersom

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \Longrightarrow f(0) = 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2},\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{8} \quad \text{och}\\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2} \Longrightarrow \frac{f'''(c)}{3!} = \frac{1}{16\,(1+c)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

är

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}$$

för något c mellan 0 och x. Sätter man in $x = 1/4$, så får man

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5} = &2\sqrt{1+1/4} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 16} + \text{ en felterm}\\
&= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \text{ en felterm,}
\end{aligned}
$$

där

$$0 < \text{feltermen} < \frac{2\cdot(1/4)^3}{16} = \frac{2}{4^5}.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 4B i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Är serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

konvergent eller inte? MOTIVERA!!!

Lösning::

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2+1/n} \to \frac{1}{2} \neq 0 \text{ då } n \to \infty$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \text{ är divergent.}$$

2. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$$

Lösning:

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x^5}$$

$$= \frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \cdots \to \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \text{ då } x \to 0.$$

3. *Beräkna ett närmevärde till* $\sqrt{10}$ *och ange hur stor feltermen är på följande sätt:*

   (a) *Uttryck* $\sqrt{10}$ *som* $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9 \cdot (1+1/9)} = 3\sqrt{1+1/9}$ $= 3\sqrt{1+x}$ *med* $x = 1/9$.

   (b) *Framställ sedan* $\sqrt{1+x}$ *som ett andra ordningens MacLaurinpolynom plus en restterm.*

(c) *Sätt till slut in $x = 1/9$.*

Lösning: Eftersom

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \Longrightarrow f(0) = 1, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}, \\
f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{8} \quad \text{och} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2} \Longrightarrow \frac{f'''(c)}{3!} = \frac{1}{16\,(1+c)^{5/2}}
\end{aligned}$$

är

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}$$

för något c mellan 0 och x. Sätter man in $x = 1/9$, så får man

$$\begin{aligned}
\sqrt{10} =& 3\sqrt{1+1/9} = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{9^2} + \text{ en felterm} \\
&= 3 + \frac{1}{18} - \frac{1}{216} + \text{ en felterm,}
\end{aligned}$$

där

$$0 < \text{feltermen} < \frac{3 \cdot (1/9)^3}{16} = \frac{1}{16 \cdot 243}.$$