Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Derivera funktionen
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$
och förenkla sedan derivatan så långt det går.

Lösning: $f(x) = (e^x - 1)/(e^x + 1) \Longrightarrow$
$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

2. Visa att $x^2 \geq 1 + 2\ln x$ då $x > 0$.

Lösning: $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \Longrightarrow$
$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2\frac{x^2 - 1}{x} = 2\frac{(x+1)(x-1)}{x},$$
som är < 0 då $0 < x < 1$, $= 0$ då $x = 1$ och > 0 då $x > 1$. Härav följer att f:s *minsta* värde då $x > 0$ är $= f(1) = 0$, så $f(x) \geq 0$ där.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 4y = e^x$.

Lösning: Karakteristiska ekvaationen $r^2 - 4 = 0$ har rötterna $r = \pm 2 \Longrightarrow y_{\text{hom}} = Ae^{2x} + Be^{-2x}$. Om vi ansätter partikulärlösningen $y_{\text{p}} = ae^x$ så får vi $(a - 4a)e^x = e^x \iff -3a = 1 \iff a = -1/3$.

SVAR: $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - 1/3\, e^x$.