

KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2008-03-10, kl. 14.00-19.00

SF1625, Envariabelanalys för CİNTE1(IT) och CMIEL1(ME) (7,5hp)

Preliminära gränser. Registrerade på kursen SF1625 får graderat betyg enligt skalan A (högsta betyg), B, C, D, E (lägsta godkända betyg), F (underkänt). Betygsgränserna är

26-28p för betyg A; 23-25p för betyg B; 20-22p för betyg C; 17-19p för betyg D; 14-16p för betyg E.

Den som fick 13p får tillfälligt betyg Fx som kan kompletteras till betyg E. Om kompletteringen misslyckas förvandlas betyget Fx till F. Kontakta i så fall läraren!

De som är redan registrerade på 5B1147 får betyg 5, 4, 3, K, U enligt det gamla systemet. Betygsgränserna då är 26p för betyg 5; 22p för betyg 4; 14p för betyg 3. Den som fick 13p får tillfälligt att kompletteras till betyg 3

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningförslaget skall textförklaras. Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.) Inga hjälpmedel!

Den som blivit godkänd på KS X , $1 \leq X \leq 4$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X , så skall motsvarande tal X inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. Bestäm alla sneda asymptoter till kurvan $f(x) = \frac{2x^3 + 2x}{3x^2 - 3}$.

2. Undersök om $\ln x \leq x - 1$ för $x > 0$.

3. En behållare full med en viss vätska har formen av den kropp som uppstår då det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ och $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ roterar ett varv kring

x -axeln. I nedersta delen av behållaren finns en kran som släpper ut vätskan med 1(v.e/s). Hur lång tid tar det att tömma behållaren?

4. Hur många riskorn behövs för att på ett schackbrädes 64 rutor lägga 1 riskorn på brädets första ruta, 3 på dess andra, 9 på dess tredje och så vidare, genom att vi varje gång multiplicerar antalet från föregående ruta med 3, till och med dess 64:e och sista ruta.

Var god Vänd

4-poängsuppgifter

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + 4y = 13\sin x$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

6. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan(2x^2 + 1) - \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)$.

7. Bestäm det minsta antal termer i serier $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^4}$ som behövs för att approximera summan med ett fel $\leq \frac{1}{3}10^{-3}$. Förklara vad du gör med en figur.

8. Vilket av talen $\sqrt[n]{n}$ $n = 2, 3, 4, \dots$ är störst?

(Tips: studera funktionen $f(x) = x^x = e^{\frac{\ln x}{x}}$ för $x > 0$)

Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2008-03-10, kl. 14.00-19.00
SF1625, linjär algebra med geometri för CINTe1(IT) och CMIEL1(ME)
(7,5hp)

1. Lösning: Tal 2.27 i övningsboken med lösning sid 74 (ingår i tal RÄKNA SJÄLV!)
2. Lösning: Tal 4.15a i övningsboken med lösning sid 105 (ingår i tal RÄKNA SJÄLV!)
3. Kurvorna skär varandra då $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x+1 = x^2+1 \Rightarrow x=0$ eller $x=1$.

På intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ och den sökta volymen är

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\arctan x - \ln|x+1| \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - \pi \ln 2.$$

Svar: $\frac{\pi^2}{4} - \pi \ln 2.$

4. Totalt antal riskorn på schackbrädets 64 rutor om man lägger ett på den första rutan, 3 på den andra, nio på den tredje o.s.v.

$$\sum_{n=1}^{64} 3^{n-1} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{63}$$

Geometrisk summa (se kursboken sid 171) med kvoten $k=3$, antal termer $n=64$, beräknas med formeln:

$$\sum_{n=1}^N k^{n-1} = \frac{1-k^N}{1-k} = [k=3, N=64] = \frac{1-3^{64}}{1-3} = (3^{64} - 1) / 2$$

Svar: Antal riskorn på schackbrädet blir $(3^{64} - 1) / 2$.

5. Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Detta betyder att $y_h(x) = e^x \left(C_1 \sin(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x) \right)$.

Pga att höger ledet $\sin x$ är inte en lösning till den homogena delen så ansätter vi som en partikulär lösning

$y_p(x) = A \sin x + B \cos x$. Det följer

$y_p'(x) = A \cos x - B \sin x$, $y_p''(x) = -A \sin x - B \cos x$ och in i den givna differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 4y = 13 \sin x.$$

Vi får

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = (-A + 2B + 4A) \sin x + (-B - 2A + 4B) \cos x$$

Vilket ger ekvationsystemet

$$\begin{cases} 3A + 2B = 13 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases}$$

Alltså är $y_p(x) = A \sin x + B \cos x = 3 \sin x + 2 \cos x$

Delsvar: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x \left(C_1 \sin(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x) \right) + 3 \sin x + 2 \cos x$

Använd $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$ för att bestämma C_1 och C_2 .

$$y(0) = C_2 + 2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$$

Vi derivera

$$y(x) = e^x \left(C_1 \sin(\sqrt{3}x) - 2 \cos(\sqrt{3}x) \right) + 3 \sin x + 2 \cos x$$

$$y' = e^x \left(C_1 \sin(\sqrt{3}x) - 2 \cos(\sqrt{3}x) \right) + e^x \left(C_1 \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}x) + 2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x) \right) + 3 \cos x - 2 \sin x .$$

som ger

$$y'(0) = (-2) + (C_1 \sqrt{3}) + 3 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Svar } y(x) = e^x \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) - 2 \cos(\sqrt{3}x) \right) + 3 \sin x + 2 \cos x$$

$$6. f(x) = \arctan(2x^2 + 1) - \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(2x^2 + 1)}{1 + (2x^2 + 1)^2} - \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)}{1 + \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2} =$$

$$\frac{4x}{1 + (2x^2 + 1)^2} - \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 2x}{(x^2 + 1)^2 \left[1 + \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 \right]} = \frac{4x}{4x^4 + 4x^2 + 2} - \frac{2x}{2x^4 + 2x^2 + 1} = 0$$

Funktionen $f(x) = \arctan(2x^2 + 1) - \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)$ är kontinuerlig deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$

och $f'(x) = 0$ ger att $f(x) = \arctan(2x^2 + 1) - \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) = \text{konstant}$. Denna konstant ges

$$\text{av } f(0) = \arctan(0 + 1) - \arctan(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Svar: Funktionen antar endast värdet $\frac{\pi}{4}$.

$$7. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^4} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^4} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^4} .$$

$$\text{Restermen } \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^4} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{3x^3} \right]_n^N = \frac{1}{3n^3} .$$

$$\text{Vi vill ha } \frac{1}{3n^3} < \frac{1}{3 \cdot 10^3} \Rightarrow n > 10$$

Vi kan ta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^4} = \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{1+k^4} \pm \frac{1}{3} 10^{-3}$$

8. Lösning se ex1 sid 218 i kursboken

Vi studera funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ för $x > 0$. Vi

$$\text{får } f'(x) = [\text{se si 218 ex1}] = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} (1 - \ln x) = 0 \Rightarrow x = e.$$

Och för derivatans tecken får vi tabellen

x	0		e	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$	\nearrow	$f(e) = e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Av tabellen framgår att $f_{\max} = f(e) = e^{\frac{1}{e}}$. Det återstår att avgöra vilket av talen

$a = f(2) = 2^{\frac{1}{2}}$ samt $b = f(3) = 3^{\frac{1}{3}}$ som är störst! Obs $2 < e < 3$

eftersom $a^6 = 8$ och $b^6 = 9$ så följer att $b > a$.

Slutsatsen är att av alla tal $\sqrt[n]{n}$ $n = 2, 3, 4, \dots$ så är $\sqrt[3]{3}$ störst!