KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1147 för IT & ME
Måndagen den 29 januari 2007, kl 15.15-16.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. för vilka x gäller att $9^{x+2} = 27 \cdot 3^{-x^2}$. Kontrollera svaret!
2. Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$
3. Funktionen $y = \frac{x-3}{x+2}$ har en invers. Bestäm denna på formen $y = f^{-1}(x)$ samt ange för vilka x den funna inversen är kontinuerlig?

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1147 för IT & ME
Måndagen den 29 januari 2007, kl 15.15-16.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. För vilka x gäller att $4^{x+2} = 8 \cdot 2^{-x^2}$. Kontrollera svaret!
2. Beräkna $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$
3. Funktionen $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ har en invers. Bestäm denna på formen $y = f^{-1}(x)$ samt ange för vilka x den funna inversen är kontinuerlig?

Lösningsförslag till KS1

Vänster

1) Logaritmera

$9^{x+2} = 27 \cdot 3^{-x^2} \Rightarrow \ln\left(9^{x+2}\right) = \ln\left(27 \cdot 3^{-x^2}\right) \Rightarrow (x+2)\ln 9 = \ln(27) + \ln\left(3^{-x^2}\right)$

$\Rightarrow (x+2)\ln\left(3^2\right) = \ln\left(3^3\right) - x^2 \ln 3 \Rightarrow 2(x+2)\ln 3 = 3\ln 3 - x^2 \ln 3$

$\Rightarrow \left(x^2 + 2x + 4 - 3\right)\ln 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

kontroll $9^{-1+2} = 27 \cdot 3^{-(-1)^2} \Rightarrow 9 = 9$

svar $x = -1$

alternativt

$9^{x+2} = 27 \cdot 3^{-x^2} \Leftrightarrow (3^2)^{x+2} = \left(3^3\right)3^{-x^2} \Leftrightarrow 3^{2x+4} = 3^{3-x^2}$

.

$\Rightarrow 2x + 4 = 3 - x^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$

se ovan

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x} = \left[(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)-(2-x)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Svar: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Vi löser ur $y = \frac{x-3}{x+2}$, $x = f^{-1}(y)$. Vi får

$$y = \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) - x + 3 = 0 \Leftrightarrow xy + 2y - x + 3 = x(y-1) = -(2y+3)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{(2y+3)}{y-1} = \frac{2y+3}{1-y} = f^{-1}(y)$$

$x \leftrightarrow y$**,** detta ger att $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$**.** Uppenbart att $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \neq 1$**,** ty $\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{1-x}$ finns inte.

Höger:

1) Logaritmera

$4^{x+2} = 8 \cdot 2^{-x^2} \Rightarrow \ln\left(4^{x+2}\right) = \ln\left(8 \cdot 2^{-x^2}\right) \Rightarrow (x+2)\ln 4 = \ln(8) + \ln\left(2^{-x^2}\right)$

$\Rightarrow (x+2)\ln\left(2^2\right) = \ln\left(2^3\right) - x^2 \ln 2 \Rightarrow 2(x+2)\ln 2 = 3\ln 2 - x^2 \ln 2$

$\Rightarrow \left(x^2 + 2x + 4 - 3\right)\ln 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

kontroll $4^{-1+2} = 8 \cdot 2^{-(-1)^2} \Rightarrow 4 = 4$

svar $x = -1$

Alternativt:

$4^{x+2} = 8 \cdot 2^{-x^2} \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{x+2} = \left(2^3\right)2^{-x^2} \Leftrightarrow 2^{2x+4} = 2^{3-x^2}$

$\Rightarrow 2x + 4 = 3 - x^2 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 = 0$

Se ovan.

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x} = \left[(\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x})\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)-(3-x)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Svar: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Vi löser ur $y = \frac{x+3}{x-2}$ $x = f^{-1}\left(y\right)$. Vi får

$$y = \frac{x+3}{x-2} \Leftrightarrow y\left(x-2\right) - x - 3 = 0 \Leftrightarrow xy - 2y - x - 3 = x\left(y-1\right) = \left(2y+3\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(2y+3\right)}{y-1} = f^{-1}\left(y\right).$$

$x \leftrightarrow y$**,** detta ger att $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$**.** Uppenbart att $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ är definierat och kontinuerlig för alla $x \neq 1$**,** ty $\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-1}$ finns inte.