KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i SF1625 för IT- CINTE1 & ME-CMIEL!
Måndagen den 30 januari 2008, kl 10.15-11.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. För vilka x gäller att $\ln(x+6) = \ln(x+2) + \ln x$. Kontrollera svaret
2. Sätt $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x} + \arctan x + b$. Bestäm konstanten b sådana att $\lim_{x \to 0} f(x) = 4$.
3. Funktionen $y = 4 + 3e^{-2x}$ har en invers. Bestäm denna på formen $y = f^{-1}(x)$ samt ange för vilka x den funna inversen är kontinuerlig?

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i SF1625 för IT- CINTE1 & ME-CMIEL!
Måndagen den 30 januari 2008, kl 10.15-11.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. För vilka x gäller att $\ln(x+15) = \ln(x+3) + \ln x$. Kontrollera svaret!
2. Sätt $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} + \arctan x + a$. Bestäm konstanten a sådant att $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.
3. Funktionen $y = 1 + 2e^{-3x}$ har en invers. Bestäm denna på formen $y = f^{-1}(x)$ samt ange för vilka x den funna inversen är kontinuerlig?

Lösningsförslag till KS1

Vänster

1) Ekavationen $\ln(x+6)=\ln(x+2)+\ln x$ är definierad enbart då $x>0$. Ty $\ln x$ är definierade enbart för $x>0$. Detta innebar de x som satisfierar ekvationen måste vara $x>0$

Genom att använda räknelagar för logaritmen fås

$\ln(x+6)=\ln(x+2)+\ln x \Leftrightarrow \ln(x+6)=\ln((x+2)x) \Rightarrow$ **(pga kontinuitet för** $\ln()$ **för** $x>0$**)**

fås $x+6=x(x+2) \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Rightarrow x+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2} \Rightarrow x=-3{,}2$

svar: $x=2$ är den enda lösningen till ekvationen $\ln(x+6)=\ln(x+2)+\ln x$

Kontroll: $\ln(2+6)=\ln(2+2)+\ln 2 \Leftrightarrow \ln(8)=\ln(4)(2)$

2) Vi har a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}+\arctan x+b=4 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}+\arctan(0)+b=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}+b=4$

men **vet se kursboken sats14 sid 114 att** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$**.** Vi får då att

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{\sin 3x}{x}=3\frac{\sin 3x}{3x},\ t=3x\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=3$**.**

Vi får $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}+b=4 \Leftrightarrow 3+b=4 \Rightarrow b=1$

3) Vi löser ur $y=4+3e^{-2x}$, $x=f^{-1}(y)$. Vi får

$y=4+3e^{-2x} \Leftrightarrow \left(\frac{y-4}{3}\right)=e^{-2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{y-4}\right)=e^{2x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{y-4}\right)=2x$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{y-4}\right)=f^{-1}(y)$

$x \leftrightarrow y$**,** detta ger att $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{x-4}\right)$**.** Uppenbart att $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{x-4}\right)$ är definierad och kontinuerlig för alla $x>4$**. Ty** $\ln(g(x))$ **är definierad enbart om** $g(x)>0$.

Höger:

1) Ekavationen $\ln(x+15)=\ln(x+3)+\ln x$ är definierad enbart då $x>0$. Ty $\ln x$ är definierade enbart för $x>0$. Detta innebar de x som satisfierar ekvationen måste vara $x>0$

Genom att använda räknelagar för logaritmen fås

$\ln(x+15)=\ln(x+3)+\ln x \Leftrightarrow \ln(x+15)=\ln((x+3)x) \Rightarrow$ **(pga kontinuitet för** $\ln()$ **för** $x>0$**)**

fås $x+15=x(x+3) \Leftrightarrow x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-1-15=0 \Rightarrow x+1=\pm 4 \Rightarrow x=-6{,}4$

svar: $x=3$ är den enda lösningen till ekvationen $\ln(x+15)=\ln(x+3)+\ln x$

Kontroll: $\ln(3+15)=\ln(3+3)+\ln 3 \Leftrightarrow \ln(18)=\ln(6)(3)$

2) Vi har a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}+\arctan x+a=3 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}+\arctan(0)+a=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}+a=3$

men **vet se kursboken sats14 sid 114 att** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$**.** Vi får då att

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{\sin 2x}{x}=2\frac{\sin 2x}{2x},\ t=2x\right]=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=2$**.**

Vi får $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}+a=3 \Leftrightarrow 2+a=3 \Rightarrow a=1$

3) Vi löser ur $y = 1 + 2e^{-3x}$, $x = f^{-1}(y)$. Vi får

$$y = 1 + 2e^{-3x} \Leftrightarrow \left(\frac{y-1}{2}\right) = e^{-3x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{y-1}\right) = e^{3x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{y-1}\right) = 3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{y-1}\right) = f^{-1}(y)$$

$x \leftrightarrow y$**,** detta ger att $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{x-1}\right)$**.** Uppenbart att $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{x-1}\right)$ är definierad och kontinuerlig för alla $x > 1$**. Ty** $\ln(g(x))$ **är definierad enbart om** $g(x) > 0$.