KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1147 för IT & ME
Onsdagen den 7 februari 2007, kl 15.15-16.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen**.**

1.Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = (x + 2)\sin 3x + 1$ i punkten $(0, 1)$.

2.Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1$.

3. Bestäm största och minsta värdena till funktionen $f(x)=(13 - 2x)\sqrt{1 + 4x}$, $0 \le x \le 6$.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1147 för IT & ME
Onsdagen den 7 februari 2007, kl 15.15-16.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1.Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = (x+3)\sin 2x + 1$ punkten $(0, 1)$.

2.Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 6x - 5$.

3. Bestäm största och minsta värdena till funktionen $f(x) = (13 - 4x)\sqrt{1+8x}$,
$0 \le x \le 3$.

Lösningsförslag till KS2

Vänster

1. Tangenten till kurvan $y = y(x)$ i punkten (a,b) ges av $y - b = y'(a)(x - a)$. Här har vi $y = (x + 2)\sin 3x + 1$, $(a,b) = (0,1)$ och

$y' = \sin 3x \cdot D(x + 2) + (x + 2) \cdot D(\sin 3x) = \sin 3x + (x + 2) \cdot \cos 3x \cdot D(3x) =$
$= \sin 3x + 3(x + 2)\cos 3x$

vilket ger $y'(0) = 6$. Tangentens ekvation är alltså $y = 6x + 1$. **Svar:** $y = 6x + 1$.

---

2. $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 4r + 3 = 0$ och har rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, alltså $y_h = Ae^x + Be^{3x}$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 3y = 0$.
Vi söker en partikulärlösning y_p på formen $y = ax + b$. Vi har då $y' = a$ och $y'' = 0$ vilket, insatt i den givna ekvationen, ger $3ax + 3b - 4a = 6x + 1$. Identifiering ger $a = 2$, $b = 3$ och man får partikulärlösningen $y_p = 2x + 3$. Den givna ekvationen har alltså den allmänna lösningen $y = Ae^x + Be^{3x} + 2x + 3$. **Svar:** $y = Ae^x + Be^{3x} + 2x + 3$.

---

3. Funktionen $f(x) = (13 - 2x)\sqrt{1 + 4x}$ är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $0 \le x \le 6 \Rightarrow f$ antar ett största och ett minsta värde. Dessa värden antas i antingen i en stationär punkt eller en singulär punkt eller i en ändpunkt på intervallet.
Stationära punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$. Vi har

$$f'(x) = -2\sqrt{1 + 4x} + \frac{4(13 - 2x)}{2\sqrt{1 + 4x}} = \frac{12(2 - x)}{\sqrt{1 + 4x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Derivatan $f'(x)$ är definierad i varje punkt på intervallet, alltså det finns inga singulära punkter. De aktuella punkterna är $x = 2$, $x = 0$ och $x = 6$. I dessa punkter fås $f(2) = 27$, $f(0) = 13$ och $f(6) = 5$ vilket innebär att **Svar:** största värdet = 27, minsta värdet = 5.

Höger:

1. Tangenten till kurvan $y = y(x)$ i punkten (a,b) ges av $y - b = y'(a)(x - a)$. Här har vi $y = (x + 3)\sin 2x + 1$, $(a,b) = (0,1)$ och

$y' = \sin 2x \cdot D(x + 3) + (x + 3) \cdot D(\sin 2x) = \sin 2x + (x + 3) \cdot \cos 2x \cdot D(2x) =$
$= \sin 2x + 2(x + 3)\cos 2x$

vilket ger $y'(0) = 6$. Tangentens ekvation är alltså $y = 6x + 1$. **Svar:** $y = 6x + 1$.

---

2. $y'' - 3y' + 2y = 6x - 5$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 3r + 2 = 0$ och har rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, alltså $y_h = Ae^x + Be^{2x}$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Vi söker en partikulärlösning y_p på formen $y = ax + b$. Vi har då $y' = a$ och $y'' = 0$ vilket, insatt i den givna ekvationen, ger $2ax + 2b - 3a = 6x - 5$. Identifiering ger $a = 3$, $b = 2$ och man får partikulärlösningen $y_p = 3x + 2$. Den givna ekvationen har alltså den allmänna lösningen $y = Ae^x + Be^{3x} + 3x + 2$. **Svar:** $y = Ae^x + Be^{2x} + 3x + 2$.

Funktionen $f(x) = (13 - 4x)\sqrt{1 + 8x}$ är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $0 \le x \le 3 \Rightarrow f$ antar ett största och ett minsta värde. Dessa värden antas i antingen en stationär punkt eller en singulär punkt eller i en ändpunkt på intervallet.
Stationära punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$. Vi har

$$f'(x) = -4\sqrt{1 + 8x} + \frac{8(13 - 4x)}{2\sqrt{1 + 8x}} = \frac{48(1 - x)}{\sqrt{1 + 8x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Derivatan $f'(x)$ är definierad i varje punkt på intervallet, alltså det finns inga singulära punkter. De aktuella punkterna är $x = 1$, $x = 0$ och $x = 3$. I dessa punkter fås $f(1) = 27$, $f(0) = 13$ och $f(3) = 5$ vilket innebär att $\boxed{\textbf{Svar:}\ \text{största värdet} = 27,\ \text{minsta värdet} = 5.}$