KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1625 för IT & ME
Fredagen den 8 februari 2008, kl 08.15-09.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1.Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y(x) = (x+5)\cos 5x - 4$ i punkten $(0, 1)$.

2.Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = \sin x$

3. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen
$f(x) = 2x^2 - 10x + 15\ln(2x+3)$

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1625 för IT & ME
Fredagen den 8 februari 2008, kl 08.15-09.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y(x) = (x+4)\cos 3x - 3$ i punkten $(0, 1)$.

2.Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = \cos x$.

3. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen
$f(x) = 2x^2 - 6x + 3\ln(2x+1)$

Lösningsförslag till KS2
Vänster

1.Normalen till kurvan $y = y(x)$ i punkten (a,b) ges av $y - b = -\frac{1}{y'(a)}(x-a)$. Här har vi

$y = (x+5)\cos 5x - 4$, $(a,b) = (0,1)$ och

$$y' = \frac{d}{dx}\left((x+5)\cos 5x - 4\right) = \cos 5x + (x+5)(-5\sin 5x)$$

vilket ger $y'(0) = 1$. Normalens ekvation är alltså $y - 1 = -\frac{1}{1}(x-0)$

Svar $y = -x+1$.

---

2. $y'' + 2y' + y = \sin x$ Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ och har rötterna $r_1 = -1$, $r_2 = -1$, alltså $y_h = (Ax+B)e^{-x}$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$.

Vi söker en partikulärlösning y_p på formen $y = a\sin x + b\cos x$. Vi har då $y' = a\cos x - b\sin x$ och $y'' = -a\sin x - b\cos x$. vilket, insatt i den givna ekvationen, ger $-a\sin x - b\cos x + 2(a\cos x - b\sin x) + a\sin x + b\cos x = 2a\cos x - 2b\sin x = \sin x$.

Identifiering ger $a = 0$, $b = \frac{-1}{2}$ och man får partikulärlösningen $y_p = \frac{-\cos x}{2}$. Den givna ekvationen har alltså den allmänna lösningen $y = (Ax+B)e^{-x} - \frac{\cos x}{2}$.

---

3. Funktionen $f(x) = 2x^2 - 10x + 15\ln(2x+3)$ är definierad och deriverbar för alla $x > -3/2$. Detta medför att endast kritiska punkter till f kan vara lokala extrempunkter.

Vi har

$$f'(x) = 4x - 10 + \frac{30}{2x+3} = \frac{8x(x-1)}{2x+3}$$

Stationära punkter punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$, vilket ger $x = 0$ och $x = 1$.

Derivatans teckenväxling

x	$-3/2$	$-3/2 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$8x$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	f defiinierad för $x > -3/2$	$\nearrow$	$x = 0$ lokal max	$\searrow$	$x = 1$ lokal min	$\nearrow$

Höger:

1. Normalen till kurvan $y = y(x)$ i punkten (a,b) ges av $y - b = -\frac{1}{y'(a)}(x-a)$. Här har vi

$y = (x+4)\cos 3x - 3$, $(a,b) = (0,1)$ och

$$y' = \frac{d}{dx}((x+4)\cos 3x - 3) = \cos 3x + (x+4)(-3\sin 3x)$$

vilket ger $y'(0) = 1$. Normalens ekvation är alltså $y - 1 = -\frac{1}{1}(x-0) \Rightarrow y = -x+1$

---

2. $y'' + 2y' + y = \cos x$ Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ och har rötterna $r_1 = -1$, $r_2 = -1$, alltså $y_h = (Ax+B)e^{-x}$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$.

Vi söker en partikulärlösning y_p på formen $y = a\sin x + b\cos x$. Vi har då $y' = a\cos x - b\sin x$ och $y'' = -a\sin x - b\cos x$. vilket, insatt i den givna ekvationen, ger $-a\sin x - b\cos x + 2(a\cos x - b\sin x) + a\sin x + b\cos x = 2a\cos x - 2b\sin x = \cos x$.

Identifiering ger $b = 0$, $a = \frac{1}{2}$ och man får partikulärlösningen $y_p = \frac{\sin x}{2}$. Den givna ekvationen har alltså den allmänna lösningen $y = (Ax+B)e^{-x} + \frac{\sin x}{2}$.

3. Funktionen $f(x) = 2x^2 - 6x + 3\ln(2x+1)$ är definierad och deriverbar för alla $x > -1/2$. Detta medför att endast kritiska punkter till f kan vara lokala extrempunkter.

Vi har

$$f'(x) = 4x - 6 + \frac{6}{2x+1} = \frac{8x(x-1)}{2x+1}$$

Stationära punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$, vilket ger $x = 0$ och $x = 1$.
Derivatans teckenväxling

x	$-1/2$	$-1/2 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$8x$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	f definierad för $x > -1/2$	$\nearrow$	$x = 0$ lokal max	$\searrow$	$x = 1$ lokal min	$\nearrow$