KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i SF1625 för IT & ME
Fredagen den 22 februari 2008, kl 08.15-09.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1.. Bestäm arean av det ändliga område $D = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\cos x}{1+4\sin^2 x} \right\}$

2. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området definierat av
$0 \le y \le \sqrt{\frac{1}{(x-2)(x-4)}}, 5 \le x \le 8$ roterar ett varv kring $x-$axeln.

3. En myra rör sig med en längd enhet per sekund på banan $f(x) = \int_1^x \sqrt{9t^2-1}\,dt, \;\; 1 \le x \le 2.$

Hur mycket tid behöver myran för att gå över hela banan.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i SF1625 för IT & ME
Fredagen den 22 februari 2008, kl 08.15-09.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm arean av det ändliga område $D=\left\{(x,y):0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\cos x}{1+9\sin^2 x}\right\}$

2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området defierat av

$0\le y\le \sqrt{\frac{1}{(x-2)(x-3)}}, 5\le x\le 8$ roterar ett varv kring $x-$axeln.

3. En myra rör sig med en längd enhet per sekund på banan $f(x) = \int_1^x \sqrt{16t^2-1}\,dt$, $1\le x\le 2$.

Hur mycket tid behöver myran för att gå över hela banan.

Lösningsförslag till KS3

Vänster

1. vi söker $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+4\sin^2 x}dx =$ { $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$, t: 0 $\to$ 1 } $= \int_0^1 \frac{1}{1+4t^2}dt =$ { $2t = u$, $dt =$ 1/2 du, u: 0 $\to$ 2 } =

$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{1+u^2}du \;= \frac{1}{2}\left[\arctan u\right]_0^2 = \frac{1}{2}$ arctan 2.

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{1}{2}\arctan 2.}$

---

2. vi söker $\pi\int_3^5 \left(f(x)\right)^2 dx = \;\pi \int_5^8 \frac{1}{(x-2)(x-4)}dx$

Vi har

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{2}, A = \frac{-1}{2}$$

och

$$\int_5^8 \frac{1}{(x-2)(x-4)}dx = \int_5^8 \frac{-1/2}{x-2}dx + \int_5^8 \frac{1/2}{x-4}dx = \left[\frac{-1}{2}\ln|x-2|\right]_5^8 + \left[\frac{1}{2}\ln|x-4|\right]_5^8 =$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-4}{x-2}\right)\right]_5^8 = \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{4}{6}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2}\{\ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 3\}$$

svar $\frac{\pi}{2}\ln 2$

3 . längden av banan ges av $L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$. Vet att $f(x) = \int_1^x \sqrt{9t^2-1}dt$, $1 \le x \le 2$.

Vi får $f'(x) = \sqrt{9x^2-1} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 = 9x^2-1$. Detta ger

att $L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1+9x^2-1}dx = \int_1^2 \sqrt{9x^2}dx = \int_1^2 3x dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\cdot 2^2 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 = \frac{9}{2}$

Svar . Det tar 9/2 s för myran att gå över banan

Höger:

1. vi söker $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+9\sin^2 x}dx =$ { $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$, t: 0 $\to$ 1 } $= \int_0^1 \frac{1}{1+9t^2}dt =$ { $3t = u$, $dt =$ 1/3 du, u: 0 $\to$ 3 } =

$= \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{1+u^2}du \;= \frac{1}{3}\left[\arctan u\right]_0^3 = \frac{1}{3}$ arctan 3.

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{1}{3}\arctan 3.}$

---

2. vi söker $\pi\int_3^5 (f(x))^2\,dx = \pi \int_5^8 \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx$

Vi har

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow B=1, A=-1$$

och

$$\int_5^8 \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \int_5^8 \frac{-1}{x-2}dx + \int_5^8 \frac{1}{x-3}dx = \Big[-\ln|x-2|\Big]_5^8 + \Big[\ln|x-3|\Big]_5^8 = \left[\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\right]_5^8 =$$

$$\left[\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\right]_5^8 = \ln\left(\frac{5}{6}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

svar: $\pi \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

3. längden av banan ges av $L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Vet att $f(x) = \int_1^x \sqrt{16t^2-1}\,dt$, $1 \le x \le 2$.

Vi får $f'(x) = \sqrt{16x^2-1} \Rightarrow (f'(x))^2 = 16x^2-1$. Detta ger

att $L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+16x^2-1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{16x^2}\,dx = \int_1^2 4x\,dx = \left[2x^2\right]_1^2 = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 1^2 = 6$

Svar: Det tar 6 s för myran att gå över banan