KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i 5B1147 för IT & ME
Onsdagen den 28 februari 2007, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1+2\sin x - e^{2x}}{x^2}$

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen f(x) = arctan 3x + $\sqrt{1+2x^2}$
kring punkten a = 0.

3. Undersök om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3e^n\sqrt{n}}$ är konvergent

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i 5B1147 för IT & ME
Onsdagen den 28 februari 2007, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Beräkna $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \cos x - e^{2x}}{x^2}$

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x) = \arctan 2x + \sqrt{1+4x^2}$ kring punkten $a = 0$.

3. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2e^n \sqrt{n}}$ är konvergent.

Lösningsförslag till KS4

Vänster

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\sin x - e^{2x}}{x^2}$ = { typ 0/0, L'Hôpital } $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x - 2e^{2x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{2x}}{x} =$

= { typ 0/0, L'Hôpital } = $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x - 4e^{2x}}{2} = -2.$ **Svar:** –2.

---

2 Det sökta Taylorpolynomet har formen $p(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2!} f''(0)x^2$. Vi har

$f(x) = \arctan 3x + \sqrt{1+2x^2}$, $f'(x) = \dfrac{3}{1+9x^2} + \dfrac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{-54x}{(1+9x^2)^2} + \dfrac{2}{(1+2x^2)^{3/2}}$

och i punkten $x = 0$ fås $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$ och $f''(0) = 2$ vilket ger **Svar:** $1 + 3x + x^2$.

---

3. Serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{3e^n\sqrt{n}}$ är positiv och avtagande och kan därmed jämföra med

integralen $\dfrac{4}{3}\displaystyle\int_1^{\infty}\dfrac{1}{e^x\sqrt{x}}dx \le \dfrac{4}{3}\int_1^{\infty}\dfrac{1}{e^x}dx = \dfrac{4}{3}\int_1^{\infty}e^{-x}dx = \dfrac{4}{3}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}e^{-x}dx = \dfrac{4}{3}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b = \dfrac{4}{3}e^{-1}$

Dvs $\dfrac{4}{3}\displaystyle\int_1^{\infty}\dfrac{1}{e^x\sqrt{x}}dx$ är konvergent.

Svar : Enligt Integraltestet är även $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{3e^n\sqrt{n}}$ konvergent.

Höger:

1.. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\cos x - e^{2x}}{x^2}$ = { typ 0/0, L'Hôpital } $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sin x - 2e^{2x}}{2x}$ = { typ 0/0, L'Hôpital } =

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x - 4e^{2x}}{2} = -\dfrac{5}{2}$. **Svar:** –5/2.

---

2. Det sökta Taylorpolynomet har formen $p(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2!} f''(0)x^2$. Vi har

$f(x) = \arctan 2x + \sqrt{1+4x^2}$, $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2} + \dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{-16x}{(1+4x^2)^2} + \dfrac{4}{(1+4x^2)^{3/2}}$

och i punkten $x = 0$ fås $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ och $f''(0) = 4$ vilket ger **Svar:** $1 + 2x + 2x^2$.

---

3. Serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{2e^n\sqrt{n}}$ är positiv och avtagande och kan därmed jämföra med

integralen $\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_1^{\infty}\dfrac{1}{e^x\sqrt{x}}dx \le \dfrac{3}{2}\int_1^{\infty}\dfrac{1}{e^x}dx = \dfrac{3}{2}\int_1^{\infty}e^{-x}dx = \dfrac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}e^{-x}dx = \dfrac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b = \dfrac{3}{2}e^{-1}$

Dvs $\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_1^{\infty}\dfrac{1}{e^x\sqrt{x}}dx$ är konvergent.

Svar : Enligt Integraltestet är även $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{2e^n\sqrt{n}}$ konvergent