KTH Matematik
kontrollskrivning nr 4 i SF1625 för IT & ME
Måndagen den 3 mars 2008, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Beräkna summan av den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{4^{k+1}}$.

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x) = e^{\sin x}$ kring punkten a = 0.

3. Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i 5B1147 för IT & ME
Onsdagen den 28 februari 2007, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Beräkna summan av den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+3^k}{4^{k+1}}$.

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x)=e^{\cos x}$ kring punkten a = 0.

3. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}$.

Lösningsförslag till KS4

Vänster

1. Beräkna summan av den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3+2^k}{4^{k+1}}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3+2^k}{4^{k+1}}=\left[\frac{3+2^k}{4^{k+1}}=\frac{3}{4^{k+1}}+\frac{2^k}{4^{k+1}}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^k}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^k}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Geometriska serien säger $\sum_{k=0}^{\infty}ar^k=\left\{\frac{a}{1-r},|r|<1\right.$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^k}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\frac{2}{1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x)=e^{\sin x}$ kring punkten a = 0.

Den sökta taylorpolynomet har formen $p(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$.

Fi får $f(x)=e^{\sin x}, f'(x)=e^{\sin x}\cos x, f''(x)=e^{\sin x}\left(\cos^2 x-\sin x\right)$ som ger

$f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=1$.

Svar $p(x)=1+x+x^2/2$

3. Beräkna $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

T.ex L'Hôpitalaregel ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^x-1-x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^x-1\right)}{\frac{d}{dx}(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Höger:

1. Beräkna summan av den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+3^k}{4^{k+1}}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+3^k}{4^{k+1}}=\left[\frac{2+3^k}{4^{k+1}}=\frac{2}{4^{k+1}}+\frac{3^k}{4^{k+1}}=\frac{2}{4}\left(\frac{1}{4^k}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right]=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Geometriska serien säger $\sum_{k=0}^{\infty}ar^k=\left\{\frac{a}{1-r},|r|<1\right.$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\frac{4}{1}=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x)=e^{\cos x}$ kring punkten a = 0.

Den sökta taylorpolynomet har formen $p(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$.

Fi får $f(x)=e^{\cos x}, f'(x)=e^{\cos x}(-\sin x), f''(x)=e^{\cos x}\left(\sin^2 x-\cos x\right)$ som ger $f(0)=e, f'(0)=0, f''(0)=-e$.

Svar $p(x)=e(1-x^2/2)$

3. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{x^2}$

T.ex L'Hôpitalaregel ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(1+x-e^x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(1-e^x\right)}{\frac{d}{dx}\left(2x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$$