

Lösning till kontrollskrivning 1A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Vi vill studera funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4 + 1}.$$

- (a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1p)
- (b) Visa att $f(-x) = f(x)$. (1p)
- (c) Skissera f 's graf med hjälp av (a) och (b) samt f 's uppenbara nollställe. (1p)

Lösning:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^4} \cdot \frac{1}{1 + x^{-4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + x^{-4}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

(b)

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^4 + 1} = \frac{2x^2}{x^4 + 1} = f(x).$$

- (c) Med hjälp av (a), (b) och $f(x) = 0 \iff x = 0$ är det LÄTT att rita grafen själv!

2. (a) Bestäm inversen f^{-1} till funktionen

$$y = f(x) = \frac{2x}{3x-1}. \quad (2p)$$

(b) Visa att $f \circ f^{-1} = \text{id}$. (1p)

Lösning:

(a)

$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{3x-1} &\iff 3xy - y = 2x \iff x(3y-2) = y \iff \\ x = \frac{y}{3y-2} &\implies f^{-1}(x) = \frac{x}{3x-2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f\left(\frac{x}{3x-2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x}{3x-2}}{3 \cdot \frac{x}{3x-2} - 1} \\ &= \frac{\frac{2x}{3x-2}}{\frac{3x-3x+2}{3x-2}} = \frac{2x}{2} = x. \end{aligned}$$

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}. \quad (3p)$$

Lösning: Genom att faktorisera täljaren och nämnaren med hjälp av sina nollställen får man

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3} \rightarrow \frac{-2-1}{-2+3} = -3 \text{ då } x \rightarrow -2.$$