

Lösning till kontrollskrivning 1B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Vi vill studera funktionen

$$f(x) = \frac{2x}{x-2}.$$

- (a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1p)
- (b) Bestäm eventuella lodräta asymptoter. (1p)
- (c) Skissera f 's graf med hjälp av (a) och (b). (1p)

Lösning:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{2}{1-2x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1-2x^{-1}} = 2.$$

(b) $x = 2$ är en lodrät asymptot.

(c) $x \rightarrow 2^+ \implies f(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 2^- \implies f(x) \rightarrow -\infty$ och $x \rightarrow \pm\infty \implies f(x) \rightarrow 2$ gör det LÄTT att rita f 's graf!

2. (a) Bestäm inversen f^{-1} till funktionen

$$y = f(x) = \frac{3x}{x+2}. \quad (2p)$$

(b) Visa att $f^{-1} \circ f = \text{id}$. (1p)

Lösning:

(a)

$$\begin{aligned} y = \frac{3x}{x+2} &\iff yx + 2y = 3x \iff x(y-3) = -2y \iff \\ x = \frac{-2y}{y-3} &\implies f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-3}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}\left(\frac{3x}{x+2}\right) = \frac{-2 \cdot \frac{3x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2} - 3} \\ &= \frac{\frac{-6x}{x+2}}{\frac{3x-3x-6}{x+2}} = \frac{-6x}{-6} = x. \end{aligned}$$

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}. \quad (3p)$$

där a är ett fixt tal.

Lösning:

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = -\frac{1}{ax} \rightarrow -\frac{1}{a^2} \quad \text{då } x \rightarrow a.$$