Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Derivera funktionen $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ och förenkla sedan derivatan så långt det går.

   Lösning: $f(x) = x \cdot (1-x^2)^{1/2} \Longrightarrow$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^2)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) \\ &= \sqrt{1-x^2} - x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

2. Visa att $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ för alla x.

   Lösning: $f(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \Longrightarrow$

   $$f'(x) = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x,$$

   som är < 0 då $x < 0$, $= 0$ då $x = 0$ och > 0 då $x > 0$. Härav följer att f:s *minsta* värde är $= f(0) = 0$, så $f(x) \geq 0$ för alla x.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = x$.

   Lösning: Karakteristiska ekvaationen $r^2 + 4 = 0$ har rötterna $r = \pm 2i \Longrightarrow y_{\text{hom}} = A\cos 2x + B\sin 2x$. Om vi ansätter partikulärlösningen $y_{\text{p}} = ax$ så får vi $0 + 4ax = x \iff a = 1/4$.

   SVAR: $y = A\cos 2x + B\sin 2x + x/4$.