

Lösning till kontrollskrivning 3A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= \{u = \sqrt{x+1} \implies x = u^2 - 1 \implies dx = 2u du\} \\ &= \int \frac{u}{u^2 - 1} \cdot 2u du = 2 \int \frac{(u^2 - 1) + 1}{u^2 - 1} du = 2 \int \left(1 + \frac{1}{(u-1)(u+1)}\right) du \\ &= 2 \int \left(1 + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}\right) du = 2u + \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= 2\sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

2. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \{u = 1 - x^2 \implies du = -2x dx \iff x dx = (-1/2) du\} \\ &= \int_{u=1}^0 \frac{(-1/2) du}{u^{1/2}} = \int_0^1 \frac{1}{2} u^{-1/2} du = [u^{1/2}]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

3. Härled volymen av ett klot med radien R .

Lösning: Volymen V av ett klot med radien R kan beräknas som den rotationsvolym man får då halvcirkeln $\{y = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R\}$ roterar runt x -axeln. Eller man kan ta två gånger volymen då $0 \leq x \leq R$:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^R \pi y^2(x) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R \\ &= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$