Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}} &= \{u = \sqrt{x-4} \Longrightarrow x = u^2+4 \Longrightarrow dx = 2u\,du\} \\
&= \int \frac{2u\,du}{u(u^2+4)} = \frac{2}{4}\int \frac{du}{1+(u/2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\arctan(u/2) + C = \arctan\frac{\sqrt{x-4}}{2} + C.
\end{aligned}$$

2. Beräkna

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x-1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x-1} &= \int_{-1}^{0} \frac{(x^2-1)+1}{x-1}\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} - \ln 2.
\end{aligned}$$

3. Härled arean av en cirkelskiva med radien R.

   Lösning: Cirkeln med radien R och med origo som medelpunkt ges av ekvationen $y^2 + x^2 = R^2$. Då $y \geq 0$ är $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Vi beräknar den sökta arean A som fyra gånger arean i första kvadranten:

$$A = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

   Låt θ vara vinkeln i en rätvinklig triangel med motstående kateten $= x$, hypotenusan $= R$ och närliggande kateten $= \sqrt{R^2 - x^2}$. Då är

$$\sin\theta = \frac{x}{R} \iff x = R\sin\theta \Longrightarrow dx = R\cos\theta\, d\theta,$$

   och

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} \iff \sqrt{R^2 - x^2} = R\cos\theta.$$

   Alltså blir

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} R^2\cos^2\theta\, d\theta = 2R^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= 2R^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$