Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

# Lösning till kontrollskrivning 4A

## i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Undersök huruvida

$$\sum_{k=8}^{\infty} \frac{5}{k\sqrt{k-7}}$$

är konvergent eller inte.

**Lösning:**

$$a_k = \frac{5}{k\sqrt{k-7}} = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-7/k}} = b_k \cdot \frac{5}{\sqrt{1-7/k}}$$

med $b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1-7/k}} = 5 \quad \text{ser vi att} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 5.$$

Vidare är serien

$$\sum_{k=8}^{\infty} b_k = \sum_{k=8}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

konvergent eftersom $3/2 > 1$. Enligt jämförelsesatsen är då också $\sum_{k=8}^{\infty} a_k$ konvergent.

2. Bestäm de tre första från noll skilda termerna i Taylorutvecklingen av $\sin x$ omkring punkten $x = \pi/6$.

   **Lösning:**

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sin x \Longrightarrow f(\pi/6) = \frac{1}{2},\\
&f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&f''(x) = -\sin x \Longrightarrow \frac{f''(\pi/6)}{2!} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Longrightarrow\\
&\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \dots
\end{aligned}
$$

3. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}.$$

   **Lösning:**

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}\\
&= \frac{\frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} + \mathcal{O}(x) \to \frac{1}{24} \quad \text{då} \quad x \to 0.
\end{aligned}
$$