Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 4B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Undersök huruvida

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{5^k - 7}$$

är konvergent eller inte.

Lösning:

$$a_k = \frac{4^k}{5^k - 7} = \frac{4^k}{5^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{5^k}} = b_k \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{5^k}}$$

med $b_k = (4/5)^k$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{7}{5^k}} = 1 \quad \text{ser vi att} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1.$$

Vidare är den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

konvergent eftersom $4/5 < 1$. Enligt jämförelsesatsen är då också $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ konvergent.

2. Bestäm de tre första från noll skilda termerna i Taylorutvecklingen av $\cos x$ omkring punkten $x = \pi/6$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \cos x \Longrightarrow f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&f'(x) = -\sin x \Longrightarrow f'(\pi/6) = -\frac{1}{2} \\
&f''(x) = -\cos x \Longrightarrow \frac{f''(\pi/6)}{2!} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \\
&\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}$$

3. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$$

   Lösning:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} \\
&= \frac{\frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)}{x^5} = \frac{1}{120} + \mathcal{O}(x^2) \to \frac{1}{120} \quad \text{då} \quad x \to 0.
\end{aligned}$$