Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 2A i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen*

$$f(x) = 5x^2 + 2x$$

då $-2 \leq x \leq 1$.

Lösning: $f'(x) = 10x+2 = 10\,(x+1/5)$, så $f'(x) = 0 \iff x = -1/5$. Därmed fås följande kandidater till största respektive minsta värde:

$$f(-2) = 20-4 = 16, \quad f(-1/5) = 5\cdot\frac{1}{5^2}-2\cdot\frac{1}{5} = -1/5 \quad \text{och} \quad f(1) = 7.$$

Så största värdet är $= 16$ då $x = -2$, och det minsta är $= -1/5$ då $x = -1/5$.

2. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

på reell *form.*

Lösning: Från den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \iff r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

ser man att

$$y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

3. *Beräkna den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$y'' + 2y' + 5y = 10x - 1 + 10\cos x.$$

Lösning: Partikulärlösning till $y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$:

$$
\begin{aligned}
& y_1 = ax + b \Longrightarrow y_1' = a \Longrightarrow y_1'' = 0 \\
& \Longrightarrow 2a + 5ax + 5b = 10x - 1 \iff 5x(a-2) + 5b + 2a + 1 = 0 \\
& \iff a = 2 \text{ och } b = \frac{1}{5}(-4-1) = -1 \Longrightarrow y_1 = 2x - 1.
\end{aligned}
$$

Partikulärlösning till $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$:

$$
\begin{aligned}
& y_2 = a\cos x + b\sin x \Longrightarrow y_2' = -a\sin x + b\cos x \Longrightarrow y_2'' = -a\cos x - b\sin x \\
& \Longrightarrow \cos x \cdot (-a + 2b + 5a) + \sin x \cdot (-b - 2a + 5b) = 10\cos x \\
& \iff \cos x \cdot (4a + 2b - 10) + \sin x \cdot (4b - 2a) = 0 \\
& \iff a = 2b \text{ och } 10b - 10 = 0 \iff b = 1 \text{ och } a = 2 \\
& \Longrightarrow y_2 = 2\cos x + \sin x.
\end{aligned}
$$

SVAR: $y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2x - 1 + 2\cos x + \sin x$.