KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1148 för IT & ME
Onsdagen den 23 mars 2007, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Undersök om det är sant att funktionen $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i punkten $P=(2,-1)$ växer snabbare i $x-$riktning än i $y-$riktning?

2.Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

$$\frac{x^2}{y-z} + e^{yz-x+1} = 10$$

i punkten (3,2,1).

3. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u^2$ och $y = uv$. Undersök om

$$u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\frac{\partial f}{\partial x}$$

Vi förutsätter att f har kontinuerliga partiella derivator av första och andra ordningen.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1148 för IT & ME
Onsdagen den 23 mars 2007, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Undersök om det är sant att funktionen $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i punkten $P=(1,-2)$ växer snabbare i $y-$riktning än i $x-$riktning?

2. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

$$\frac{y^2}{z-x} + e^{xz-y+1} = 10$$

i punkten (1,3,2).

3. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = v^2$ och $y = uv$. Unsersök om

$$v\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u} = 2x\frac{\partial f}{\partial x}$$

Vi förutsätter att f har kontinuerliga partiella derivator av första och andra ordningen.

Lösningsförslag till KS1

Vänster

1. Hastigheter i $x-$riktning ges av $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=-\dfrac{2y}{(x-y)^2}$

Hastigheter i $y-$riktning ges av $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\dfrac{2x}{(x-y)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=\dfrac{2}{9}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=\dfrac{4}{9}$

Tilväxthastighet till $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i $P=(2,-1)$ i $y-$riktning är $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=\dfrac{4}{9}$

Och . tilväxthastighet till $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i $P=(2,-1)$ i $x-$riktning är $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=\dfrac{2}{9}$

Svar : funktionen växer snabbare i $P=(2,-1)$ i $y-$riktning än i $x-$riktning.

2. Låt $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y-z}+e^{yz-x+1}$. Vektorn grad $f(3,2,1)$ är planets normalvektor. Vi har

$f'_x=\dfrac{2x}{y-z}-e^{yz-x+1} \Rightarrow f'_x(3,2,1)=5$

$f'_y=\dfrac{-x^2}{(y-z)^2}+z\,e^{yz-x+1} \Rightarrow f'_y(3,2,1)=-8$

$f'_z=\dfrac{x^2}{(y-z)^2}+y\,e^{yz-x+1} \Rightarrow f'_z(3,2,1)=11$

alltså grad $f(3,2,1)=(5,-8,11)$. Tangentplanet ges av $(5,-8,11)\cdot(x-3,\,y-2,\,z-1)=0$

dvs $5x-8y+11z=10$.

Svar: $5x-8y+11z=10.$

3. Vi har $z(u,v)=f(x,y)$, där $x=u^2$ och $y=uv$. Enligt kedjeregeln får man

$z'_u=f'_x\,x'_u+f'_y\,y'_u=2u\,f'_x+v\,f'_y$ och

$z'_v=f'_x\,x'_v+f'_y\,y'_v=u\,f'_y$

vilket ger $u\,z'_u-v\,z'_v=2u^2\,f'_x=2x\,f'_x$.

Höger.

1. Hastigheter i $x-$riktning ges av $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=-\dfrac{2y}{(x-y)^2}$

Hastigheter i $y-$riktning ges av $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\dfrac{2x}{(x-y)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=\dfrac{4}{9}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=\dfrac{2}{9}$

Tilväxthastighet till $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i $P=(1,-2)$ i $y-$riktning är $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=\dfrac{2}{9}$

Och . tilväxthastighet till $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i $P=(1,-2)$ i $x-$riktning är $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=\dfrac{4}{9}$

Svar : funktionen växer snabbare i $P=(1,-2)$ i $x-$riktning än i $y-$riktning.

Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $\dfrac{y^2}{z-x} + e^{xz-y+1} = 10$ i punkten (1,3,2).

Låt $f(x,y,z) = \dfrac{y^2}{z-x} + e^{xz-y+1}$. Vektorn grad $f(1,3,2)$ är planets normalvektor. Vi har

$$f'_x = \frac{y^2}{(z-x)^2} + z\, e^{xz-y+1} \;\Rightarrow\; f'_x(1,3,2) = 11$$

$$f'_y = \frac{2y}{z-x} - e^{xz-y+1} \;\Rightarrow\; f'_y(1,3,2) = 5$$

$$f'_z = \frac{-y^2}{(z-x)^2} + x\, e^{xz-y+1} \;\Rightarrow\; f'_z(1,3,2) = -8$$

alltså grad $f(1,3,2) = (11,5,-8)$. Tangentplanet ges av $(11,5,-8)\cdot(x-1,\, y-3,\, z-2) = 0$

dvs $11x + 5y - 8z + 10 = 0$.

Svar: $11x + 5y - 8z + 10 = 0$.

.

2. Vi har $z(u,v) = f(x,y)$, där $x = v^2$ och $y = uv$. Enligt kedjeregeln får man

$z'_u = f'_x\, x'_u + f'_y\, y'_u = v\, f'_y$ och

$z'_v = f'_x\, x'_v + f'_y\, y'_v = 2v\, f'_x + u\, f'_y$

vilket ger $v\, z'_v - u\, z'_u = 2v^2 f'_x = 2x\, f'_x$.