KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1148 för IT & ME
Onsdagen den 11 april 2007, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = x^4 - 3x^2 + 2xy - y^2.$$

2. Bestäm karaktären för de stationära punkterna i föregående uppgift (det vill säga, lokalt maximum eller lokalt minimum eller sadelpunkt eller . . .).

2. Visa att det i en omgivning av punkten (0,1,2) finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $z^3 + 6xz - 12y + 4 = 0$ och sådan att $z(0,1) = 2$. Beräkna $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1148 för IT & ME
Onsdagen den 11 april 2007, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 5x^2 - 2xy + y^2 - 2x^4.$$

2. Bestäm karaktären för de stationära punkterna i föregående uppgift (det vill säga, lokalt maximum eller lokalt minimum eller sadelpunkt eller . . .).

3. Visa att det i en omgivning av punkten $(0,2,1)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $z^3 + 3xz - 3y + 5 = 0$ och sådan att $z(0,2) = 1$. Beräkna $\frac{\partial z}{\partial y}(0,2)$.

Lösningsförslag till KS2

Vänster.

Tal1+2. Funktionen $f(x,y) = x^4 - 3x^2 + 2xy - y^2$ är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.

De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.

Kritiska punkter fås ur $\nabla f = (0,0)$

dvs $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 6x + 2y = 0 & \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \\ f'_y = 2x - 2y = 0 & \Leftrightarrow y = x \qquad\qquad y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{cases}$

Vi har $A = f''_{xx} = 12x^2 - 6$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = -2$. Man får:

Hessianmatrisen $\begin{pmatrix} 12x^2 - 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

I(0,0) är hessianen $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$$\det\begin{pmatrix} -6-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (6+\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$$

som är båda negativa . Detta ger en lokal maximipunkt.

I (1,1) är hessianen $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{20}$$ som båda har olika tecken.Detta ger en sadelpunkt.

I (–1,–1) är hessianen $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{20}$$ som båda har olika tecken.Detta ger en sadelpunkt.

$\boxed{\text{Svar: Lokal maximum i } (0,0).}$

3. Visa att det i en omgivning av punkten (0,1,2) finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $z^3 + 6xz - 12y + 4 = 0$ och sådan att $z(0,1) = 2$. Beräkna $z'_x(0,1)$ och $z'_y(0,1)$.

Låt $f(x,y,z) = z^3 + 6xz - 12y + 4$. Vi har $f(0,1,2) = 0$ och $f'_z = 3z^2 + 6x = \{ x = 0, y = 1, z = 2 \} \neq 0$ vilket bevisar existensen av en sådan funktion.

Implicit derivering av $z^3 + 6xz - 12y + 4 = 0$ med avseende på x ger $3z^2z'_x + 6z + 6xz'_x = 0$.

För $x = 0$, $y = 1$ och $z = 2$ får man $12z'_x + 12 = 0$ alltså $z'_x(0,1) = -1$.

Implicit derivering av $z^3 + 6xz - 12y + 4 = 0$ med avseende på y ger $3z^2z'_y + 6xz'_y - 12 = 0$.

För $x = 0$, $y = 1$ och $z = 2$ får man $12z'_y - 12 = 0$ alltså $z'_y(0,1) = 1$.

$\boxed{\textbf{Svar: } z'_x(0,1) = -1;\ z'_y(0,1) = 1.}$

Höger.

Tal1+2. Funktionen $f(x,y) = 5x^2 - 2xy + y^2 - 2x^4$ är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.

De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.

Kritiska punkter fås ur $\nabla f = (0,0)$

Dvs

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 6x + 2y = 0 & \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \\ f'_y = 2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow y = x & \qquad y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{cases}$$

Vi har $A = f''_{xx} = 10 - 24x^2$, $B = f''_{xy} = -2$, $C = f''_{yy} = 2$. Man får:

Hessianmatrisen $\begin{pmatrix} -24x^2 + 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

I(0,0) är hessianen $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$$\det\begin{pmatrix} 10-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{20}$$

som är båda positiva . Detta ger en lokal minimipunkt

I (1,1) är hessianen $\begin{pmatrix} -14 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$\det\begin{pmatrix} -14-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(14+\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{68}$ som båda har olika tecken.Detta ger en sadelpunkt.

I (–1,–1) är hessianen $\begin{pmatrix} -14 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$\det\begin{pmatrix} -14-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(14+\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{68}$ som båda har olika tecken.Detta ger en sadelpunkt.

Svar: Lokal minimum i (0,0).

3.Visa att det i en omgivning av punkten (0,2,1) finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $z^3 + 3xz - 3y + 5 = 0$ och sådan att $z(0,2) = 1$. Beräkna $z'_x(0,2)$ och $z'_y(0,2)$.

Låt $f(x,y,z) = z^3 + 3xz - 3y + 5$. Vi har $f(0,2,1) = 0$ och $f'_z = 3z^2 + 3x = \{ x = 0, y = 2, z = 1 \} \neq 0$ vilket bevisar existensen av en sådan funktion.

Implicit derivering av $z^3 + 3xz - 3y + 5 = 0$ med avseende på x ger $3z^2 z'_x + 3z + 3xz'_x = 0$.

För $x = 0$, $y = 2$ och $z = 1$ får man $3z'_x + 3 = 0$ alltså $z'_x(0,2) = -1$.

Implicit derivering av $z^3 + 3xz - 3y + 5 = 0$ med avseende på y ger $3z^2 z'_y + 3xz'_y - 3 = 0$.

För $x = 0$, $y = 2$ och $z = 1$ får man $3z'_y - 3 = 0$ alltså $z'_y(0,2) = 1$.

Svar: $z'_x(0,1) = -1$; $z'_y(0,1) = 1$.