KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1148 för IT & ME
freddagen den 20 april 2007, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(y-x^2\right)dxdy$ då D begränsas av parabeln $y=4x^2$ och linjen $y=2$.

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, där $D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 3,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\right\}$.

3. Beräkna $\iiint_K z\,dxdydz$, då K är den del av enhetsklotet $x^2+y^2+z^2\le 1$, som ligger inom en kon med spets i origo. Konens halva toppvinkel $=\dfrac{\pi}{6}$ och den har den positiva $z-$axeln som axel.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i 5B1148 för IT & ME
freddagen den 20 april 2007, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen**.**

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(y-2x^2\right)dxdy$ då D begränsas av parabeln $y=4x^2$ och linjen $y=4$.

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, där $D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 2,\ \ x\geq 0,\ \ y\geq 0\right\}$.

3. Beräkna $\iiint_K z\,dxdydz$, då K är den del av enhetsklotet $x^2+y^2+z^2\leq 1$, som ligger inom en kon med spets i origo. Konens halva toppvinkel $=\dfrac{\pi}{3}$ och den har den positiva $z-$axeln som axel.

Lösningsförslag till KS3

Vänster.

1. $$\iint_D \left(y-2x^2\right)dxdy = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{4x^2}^{1}\left(y-2x^2\right)dy\right\}dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}-2x^2y\right]_{4x^2}^{1}dx =$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(8-8x^2\right)dx = \left[8x-\frac{8x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{3}$$

2. .Använd polära koordinater
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta, & dxdy = rdrd\theta \\ y = r\sin\theta & \end{bmatrix} = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{r=0}^{\sqrt{3}} r^2dr\right]d\theta = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}.$$

3. $\iiint_K$ z dxdydz =
$$=\begin{bmatrix} \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi\ ,\Rightarrow dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \\ D\to\Omega=\{(r,\varphi,\theta):0\le r\le 1,0\le\theta\le\pi/3,0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix}=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^1 rr^2dr=2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2.=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{16}$$

Höger.

1, $$\iint_D \left(y-x^2\right)dxdy = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{2x^2}^{2}\left(y-x^2\right)dy\right\}dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}-x^2y\right]_{2x^2}^{2}dx =$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx = \left[x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

2. .Använd polära koordinater
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta, & dxdy = rdrd\theta \\ y = r\sin\theta & \end{bmatrix} = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2dr\right]d\theta = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}.$$

3. $\iiint_K$ z dxdydz =
$$=\begin{bmatrix} \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi\ ,\Rightarrow dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \\ D\to\Omega=\{(r,\varphi,\theta):0\le r\le 1,0\le\theta\le\pi/3,0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix}=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^1 rr^2dr=2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2.=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3\pi}{8}$$