KTH Matematik
kontrollskrivning nr 4 i 5B1148 för IT & ME
Tisdagen den 8 maj 2007, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm det minsta värdet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ då (x,y) ligger på ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$

2. Beräkna linjeintegralen $\oint_\gamma (xy^2 + x + y)dx + (x^2y + 2x + y)dy$ i positiv led runt triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (1,1) och (0,1).

3. Bestäm en potential till vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2 + y, y^2 + x)$

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 4 i 5B1148 för IT & ME
Tisdagen den 8 maj 2007, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm det största värdet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ då (x,y) ligger på ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$

2. Beräkna linjeintegralen $\oint_\gamma (2xy + y^2 + y)dx + (x^2 + 2xy + 2x)dy$ i positiv led runt triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (1,0) och (1,1).

3. Bestäm en potential till vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2 + 2y, y^2 + 2x)$

Lösningsförslag till KS4

Vänster

1 . Vi söker (avståndet från origo till ellipsen)^2. Ellipsen $4x^2+y^2=4 \Leftrightarrow x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$ har halvaxlarna 1 och 2. Dvs minsta avståndet från origo till ellipsen=1

Svar $\min\limits_{4x^2+y^2=4} f(x,y=1$

2. Låt:

P = koefficienten vid dx

Q = koefficienten vid dy.

D = triangeln.

Man får $Q'_x - P'_y = 1$ och enligt Greens formeln är

linjeintegralen = $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D 1dxdy$ = arean av **D** = 1/2.

3. Om vi låter $P=x^2+y$ och $Q=y^2+x$ så får vi att $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$ och $\frac{\partial P}{\partial y}=1$. Alltså är fältet (P,Q) är konservativt i hela $\mathbf{R}^2$. Vi kan utnyttja att det enligt satsen (10.3) om konservativa fält existerar en potential $U(x,y)$ till fältet (P,Q) så att $P=\frac{\partial U}{\partial x}$ och $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$. Vi har alltså att

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}=P=x^2+y & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q=y^2+x & (2) \end{cases}$$

Integration av (1) med avseende på x ger

$$U=\int\left(x^2+y\right)dx=\frac{x^3}{3}+yx+\Psi(y) \quad (3)$$

där Ψ är någon kontinuerlig och deriverbar funktion av y.

Derivation av (3) med avseende på y samt jämförelse med (2) ger

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x+\Psi'(y)=\lceil(2)\rceil=x+y^2 \Rightarrow \Psi'=y^2 \Rightarrow \Psi=\frac{y^3}{3}+C$$

En potential till (P,Q) är alltså $U(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^3}{3}$

Höger.

1 . Vi söker (avståndet från origo till ellipsen)^2. Ellipsen $x^2+4y^2=4 \Leftrightarrow y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=1$ har halvaxlarna 1 och 2. Dvs största avståndet från origo till ellipsen=2

Svar $\max\limits_{x^2+4y^2=4} f(x,y=2^2=4$

2. Låt:

P = koefficienten vid dx
Q = koefficienten vid dy.
D = triangeln.

Man får $Q'_x - P'_y = 1$ och enligt Greens formeln är

linjeintegralen = $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D 1dxdy$ = arean av **D** = 1/2.

3. 3. Om vi låter $P=2y+x^2$ och $Q=2x+y^2$ så får vi att $\frac{\partial Q}{\partial x}=2$ och $\frac{\partial P}{\partial y}=2$. Alltså är fältet (P,Q) är konservativt i hela $\mathbf{R}^2$. Vi kan utnyttja att det enligt satsen (10.3) om konservativa fält existerar en potential $U(x,y)$ till fältet (P,Q) så att $P=\frac{\partial U}{\partial x}$ och $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$. Vi har alltså att

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}=P=x^2+2y & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q=y^2+2x & (2) \end{cases}$$

Integration av (1) med avseende på x ger

$$U=\int\left(x^2+2y\right)dx=\frac{x^3}{3}+2yx+\Psi(y) \quad (3)$$

där Ψ är någon kontinuerlig och deriverbar funktion av y.
Derivation av (3) med avseende på y samt jämförelse med (2) ger

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2x+\Psi'(y)=\lceil(2)\rceil=2x+y^2 \Rightarrow \Psi'=y^2 \Rightarrow \Psi=\frac{y^3}{3}+C$$

En potential till (P,Q) är alltså $U(x,y)=\frac{x^3}{3}+2xy+\frac{y^3}{3}$