Randvärdesproblem och en differensmetod

Många fysikaliska processer kan beskrivas med hjälp av en differentialekvation av andra ordningen, där tilläggsvillkoren är givna i två olika punkter, och man söker lösningen till ekvationen i intervallet mellan de båda punkterna. Allmänt kan vi skriva ett sådant problem på formen

$$y'' = f(x, y, y') \ , \ y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

där f är en given funktion. Detta kallas för ett **randvärdesproblem**. Kom ihåg att man måste ge två tilläggsvillkor för att lösningen till en andra ordningens differentialekvation skall vara entydigt bestämd.

Låt oss nu för enkelhets skull betrakta randvärdesproblem av typen:

$$y'' - q(x)y = f(x) \ , \ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \qquad (\text{där } q(x) \geq 0)$$

Vi skall titta lite närmare på hur man kan hitta lösningar till sådana differentialekvationer med en s.k. **differensmetod**.

Vi börjar med att dela upp intervallet [a,b] i N stycken delintervall som alla har längden $\frac{b-a}{N}$. Sätt sedan $x_n = a + nh$ och låt y_n beteckna en approximation till $y(x_n)$, där $y(x)$ är en lösning på randvärdesproblemet. Observera att vi redan känner y_0 och y_N, eftersom de ges av randvillkoren.

Om vi sätter in $x = x_n$ i differentialekvationen och ersätter $y''(x_n)$ med differenskvoten $\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$ (Kom ihåg att $y''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$) så får vi

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - q(x_n)y_n = f(x_n) \ , \ n = 1,2,3,\ldots,N-1$$

eller ekvivalent

$$y_{n+1} - (2 + h^2 q_n)y_n + y_{n-1} = h^2 f_n \ , \ n = 1,2,3,\ldots,N-1$$

där vi infört q_n och f_n som beteckning för $q(x_n)$ och $f(x_n)$.

Vi behöver se närmare på den första och sista ekvationen, eftersom y_0 och y_N finns med där. För $n = 1$ har vi

$$y_2 - (2 + h^2 q_1)y_1 + y_0 = h^2 f_1$$

vilket vi med hjälp av randvillkoret $y_0 = \alpha$ kan skriva

$y_2 - (2 + h^2 q_1) y_1 = h^2 f_1 - \alpha$
Analogt får vi för $n = N - 1$
$-(2 + h^2 q_{N-1}) y_{N-1} + y_{N-2} = h^2 f_{N-1} - \beta$

Om vi sammanfattar de obekanta y_n, $n = 1,2,3,...,N-1$, i en vektor

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

så kan vi skriva ekvationerna, som vi härlett, som ett linjärt ekvationssystem $Ay = b$ där matrisen A är tridiagonal och ges av

$$A = \begin{pmatrix} -(2+h^2 q_1) & 1 & 0 & & \\ 1 & -(2+h^2 q_2) & 1 & & \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ & & 1 & -(2+h^2 q_{N-2}) & 1 \\ & & 0 & 1 & -(2+h^2 q_{N-1}) \end{pmatrix}$$

och högerledet ges av

$$b = \begin{pmatrix} h^2 f_1 - \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} - \beta \end{pmatrix}$$

Denna metod att diskretisera randvärdesproblemet kallas för en differensmetod eftersom man ersätter derivator med differenser. Vi gjorde antagandet att $q(x) \geq 0$. Man kan visa att detta medför att A är icke-singulär, så ekvationssystemet har en entydig lösning för varje högerled . När man löser ekvationssystemet använder man lämpligen Gausselimination.

Exempel: Randvärdesproblemet $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = \sinh(1)$ har den analytiska lösningen $y(x) = \sinh(x)$ $\left(= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$. Differensmetoden med $h = 0.25$ ger ekvationerna $y_{n+1} - (2 + h^2) y_n + y_{n-1} = 0$, $n = 1,2,3$
Eller på matrisform $Ay = b$ där

$$A = \begin{pmatrix} -(2+h^2) & 1 & 0 \\ 1 & -(2+h^2) & 1 \\ 0 & 1 & -(2+h^2) \end{pmatrix}$$

och

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sinh(1) \end{pmatrix}$$

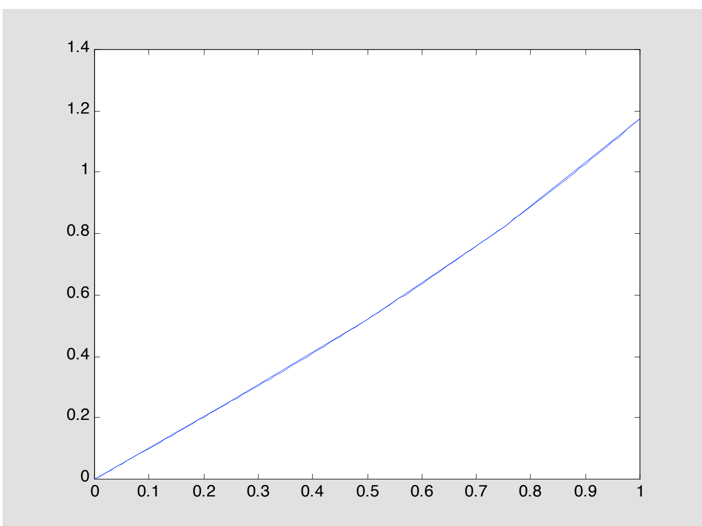
Vi kan enkelt lösa detta system i Matlab med följande kommandon

```
h=0.25;A=[-(2+h^2),1,0;1,-(2+h^2),1;0,1,-(2+h^2)],b=[0;0;-
sinh(1)],y=A\b

A =
   -2.0625    1.0000         0
    1.0000   -2.0625    1.0000
         0    1.0000   -2.0625
b =
         0
         0
   -1.1752
y =
    0.2528
    0.5214
    0.8226
```

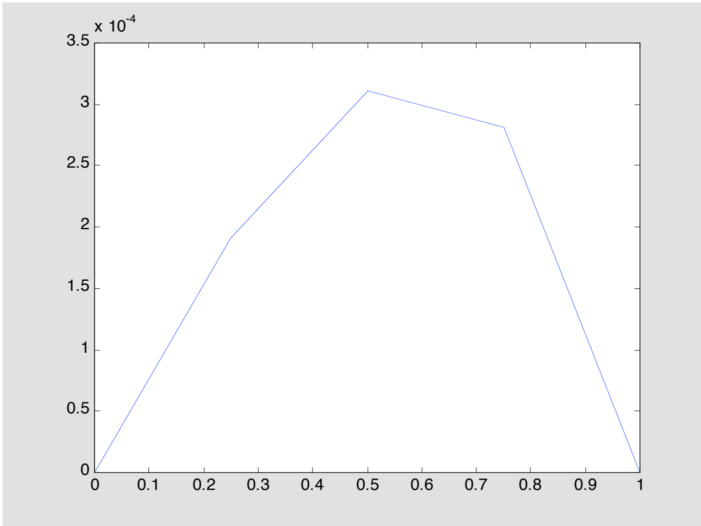
och sedan plotta den approximativa lösning i samma figur som den exakta med kommandot

```
x=0:0.25:1;y=[0;y;sinh(1)];plot(x,y),hold
on,t=0:0.01:1;plot(t,sinh(t)),hold off
```



De båda kurvorna sammanfaller nästan. För att få en uppfattning om hur stort felet egentligen är så kan vi istället plotta skillnaden av den approximativa och exakta lösningen.

```
plot(x,y'-sinh(x))
```



Felet är alltså av storleksordningen 10^{-4}. Man kan visa att trunkeringsfelet i denna differensmetod i allmänhet är $O(h^2)$, så om vi istället väljer steglängden $h = 0.125$ så kan vi förvänta oss fel som är en fjärdedel så stora som de vi fick ovan.

Laborationuppgit

I exempel ovan har vi löst randvärdesproblem $y'' - y = 0, y(0) = 0, y(1) = \sinh(1)$ löst meden differensmetod för steglängden $h = 0.25$

1) Lös randvärdesproblemet med samma differensmetod men med steglängden $h = 0.125$

(använd matlab för att lösa ev. ekvationssystem). Undersök avvikelse från den exakta lösningen och jämför med felet då steglängden $h = 0.25$ användes. Hur mycket minskade felen när steglängeden halverades

2. Lös randvärdesproblemet $y'' - y = x^2 - 2$, $y(0) = 1$, $y(1) = \cosh(1) - 1$.

Använd differensmetoden med samma steglängd som i deluppgift 1 ovan