

Lab11 ” Svängningar”(se kursboken ’Analys i en variabel’sid 347-349)

Arbetsuppgiften

En enkel modell för många slags svängande system som inte utsätts för yttre krafter ’är följande. En kropp med massan m är rörlig längs en horisontell linje. Kroppen är fästad i en fjäder med fjäderkonstanten k och är föremål för en dämpad kraft, som är proportionell mot hastigheten och motriktad rörelsen. Låt c beteckna dämpningskonstanten. Om $x(t)$ är avvikelse från jämviktsläget vid tid t så betyder $x'(t)$ kroppens hastighet vid denna tidpunkt. Den på kroppen verkande totala kraften är då lika med summan av $-kx$ (fjäderkraften) och $-cx'$ (dämpningen).

Enligt Newtons andra lag är således $mx'' = -kx - cx' \Leftrightarrow x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$. Om vi sätter

$$\lambda = \frac{c}{2m}, \quad \mu = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{så får differentialekvationen formen } x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = 0.$$

Kroppens avvikelse från jämviktsläget bestäms alltså av denna linjära och homogena differentialekvation av andra ordning med konstanta koefficienter.

1. Rita en figur som illustrerar den situation som är beskriven ovan
2. Man kan särskilja tre typer av lösningar på problemet. Om $\lambda > \mu$ så inträffar *stark* eller *överkritisk dämpning*. Om $\lambda = \mu$ inträffar *kritisk dämpning* och om $\lambda < \mu$ får vi en *dämpad* (eller *odämpad*) harmonisk svängning. Bestäm explicita uttryck på lösningarna i respektive fall. Skissa även på några typiska lösningar i respektive fall
3. Antag nu att den svängande kroppen påverkas av med tiden varierande yttre kraft av typen $f(t) = a \cos(\omega t)$. Antag också (för enkelhets skull) att ingen dämpning förekommer. Sätt upp en matematisk modell (differentialekvation) som beskriver kroppens avvikelse från jämviktsläget i detta fall. När man löser detta problem får man särskilja två fall. om $\omega \neq \mu$ så inträffar *svävning* och om $\omega = \mu$ så inträffar *resonans*. Lös i dessa fall och skissa via matlab graferna till några typiska lösningar.
4. Beskriv någon annan fysikalisk situation vars matematisk modell beskriver av en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter
5. Gör uppgift 42 sid 16 av Envariabelanalys med Matlab (sid 1-17)