

# Matematiska tillämpningar

- en exempelsamling till kurserna Matematisk analys och  
Linjär algebra

Sammanställd av Fredrik Abrahamsson

## Innehåll

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Matematisk analys</b>                         | <b>2</b>  |
| 1.1      | Formen av en konservburk . . . . .               | 3         |
| 1.2      | Ränta på ränta . . . . .                         | 6         |
| 1.3      | Grottan Lascaux . . . . .                        | 8         |
| 1.4      | Hjärtats pumpförmåga . . . . .                   | 9         |
| 1.5      | Var finns biosalongens bästa plats? . . . . .    | 11        |
| 1.6      | Vilket tar längst tid - upp eller ned? . . . . . | 13        |
| 1.7      | Förfäder och riskorn . . . . .                   | 16        |
| 1.8      | Division utan att dividera . . . . .             | 17        |
| <b>2</b> | <b>Linjär algebra</b>                            | <b>19</b> |
| 2.1      | Kemisk balans . . . . .                          | 21        |
| 2.2      | Elektriska kretsar . . . . .                     | 22        |
| 2.3      | Djuruppfödning . . . . .                         | 23        |
| 2.4      | Google och egenvektorer . . . . .                | 26        |
| 2.5      | Designerkurvor . . . . .                         | 28        |
| 2.6      | Temperaturfördelning i en metallskiva . . . . .  | 31        |
| 2.7      | Valmatematik . . . . .                           | 33        |
| <b>3</b> | <b>Matematisk sängbordslitteratur</b>            | <b>35</b> |

## 1 Matematisk analys

Det som vi idag kallar för matematisk analys är ett av de största och mest forskningsaktiva områdena inom den moderna matematiken. Den del av analysen som ingenjörstudenter huvudsakligen kommer i kontakt med är den så kallade *differentialkalkylen*. Detta område har en historia som är åtminstone 2500 år då redan de gamla grekerna försökte att lösa vissa geometriska problem med hjälp av vad vi idag skulle kalla för en gränsprocess. Området tog dock ett jättekälv framåt på 1600-talet i och med att Newton och Leibniz, oberoende av varandra, fann de matematiska verktygen nödvändiga för att beskriva en *förändringsprocess*.

Differentialkalkylen kan utan att överdriva sägas vara en av huvudorsakerna till den snabba tekniska utvecklingen. Differentialkalkyl hjälper nämligen till med att beskriva och förklara ett fundamentalt problem inom så gott som all vetenskap: förändringsprocesser. Om vi t.ex. betraktar ett objekt som befinner sig i rörelse så kan vi beskriva denna rörelse genom att ange hur dess position i rummet *förändras* med tiden. Med andra ord - vi anger dess hastighet. Med matematiktermer säger vi att hastigheten är *derivatan* av den funktion som beskriver objektets rörelse. Newton insåg att han med hjälp av denna matematik kunde beskriva de grundläggande fysikaliska lagar som beskriver hur föremål rör sig under inverkan av t.ex. tyngdkraften. Genom att använda derivator kunde han formulera ett litet antal väldigt enkla och eleganta ekvationer som involverade just olika derivator - så kallade *differentialekvationer*. Newton använde dessa ekvationer till att bl.a. förklara varför planeterna rör sig i ellipsformade banor kring solen så som Kepler hade observerat några decennier tidigare. Ekvationerna används än idag med stor framgång även om den klassiska mekaniken förfinades av Einstein i början av 1900-talet och också kvantmekaniken gjorde sitt intåg några år senare. I samtliga dessa teorier är dock fortfarande olika differentialekvationer centrala.

Newton och Leibniz startade inget mindre än en vetenskaplig revolution och differentialkalkylen blev en oerhörd framgångssaga som vi fortfarande inte sett slutet av. Matematiken ställdes på en teoretiskt stabil grund i slutet av 1800-talet efter insatser av bl.a. Riemann och utvecklades sedermera till det som idag kallas matematisk analys.

Så gott som alla existerande naturvetenskapliga modeller involverar differentialekvationer och antalet tillämpningar ökar dagligen, detta tack vare den matematiska forskningen i kombination med datorernas snabba utveckling. Idag är det möjligt att t.ex. designa en helt ny bil och sedan "krocka" denna bil utan att bygga en enda prototyp. Man kan också simulera börsernas stokastiska utveckling över tiden och försöka förstå de makroekonomiska effekter som en ränteförändring orsakar.

Detta häfte gör inget anspråk på att förmedla en fullständig överblick över analysens många tillämpningsområden - detta är en omöjlig uppgift även för en tjock bok. Målsättningen är att läsaren skall få se små exempel på matematiska modeller som inte är alltför abstrakta eller komplicerade men heller inte så triviala att de blir ointressanta. Många av exemplen är "klassiska" och återfinns i ett flertal böcker, längst bak i texten finns en referenslista.

## 1.1 Formen av en konservburk

Om man tittar efter i snabbköpet på konservhyllan så finner man att större konserver är nästan kvadratiska till sin utformning, medan mindre konserverburkar är förhållandevis höga och smala. Varför är det så? Om man tar med ett måttband så kan man mäta burkarnas radie  $r$  och höjd  $h$ . Man finner att kvoten  $\frac{h}{r}$  varierar mellan nästan 2 (burken är kvadratisk) och upp till så höga värden som 3.8 (burken är då hög och smal). Varför?

### I en perfekt värld...

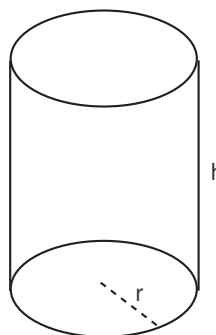
Antag att vi vill tillverka en cylinderformad burk som skall ha en given volym  $V$ . Vi antar som första approximation att vi kan skära ut topp, botten och den rektangulära kroppen *utan* några materialförluster.

Om vi sedan antar att tillverkningskostnaden  $K$  är direkt proportionell mot materialåtgången, så vill vi alltså minimera

$$\text{kostnaden } K = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

under bivillkoret att volymen  $V$  är fix, dvs.

$$\text{volymen } V = \pi r^2 h = \text{konstant.} \quad (*)$$



Här kan vi lösa ut  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ , och därmed skriva kostnaden som funktion enbart av radien  $r$ ;

$$K(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

och vi söker alltså minimum av  $K(r)$  på intervallet  $[0, \infty[$ . Man finner enkelt att

$$K'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

så att  $K'(r) = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$ . Analys av derivatans teckenväxlingar ger att detta värde minimerar  $K$ , och man finner enkelt att

$$\frac{h}{r} = 2,$$

dvs. med våra antaganden minimeras kostnaden av en helt kvadratisk burk.

### ...men världen är ju som den är.

Nu är ju vårt antagande ovan om noll materialförluster minst sagt naivt. En lite mer verklighetsbaserad modell torde vara om vi skär ut topp och botten från en kvadratisk skiva med sidlängd  $2r$ .

Materialåtgången (och därmed kostnaden) blir då något större och vi vill nu minimera

$$K = 2(2r)^2 + 2\pi r h = 8r^2 + 2\pi r h.$$

Om vi nu utnyttjar bivillkoret (\*) på samma sätt som förut så fås

$$K(r) = 8r^2 + \frac{2V}{r}$$

och

$$K'(r) = 16r - \frac{2V}{r^2} = \frac{16r^3 - 2V}{r^2}.$$

Den stationära punkten  $r$  uppfyller nu  $r^3 = \frac{V}{8}$  så att

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

ett betydligt större värde än förut!

### Lite bättre kan vi...

En ingenjör från ING hade naturligtvis insett att materialspletet blir alldeles för stort om man gör som ovan. Lite bättre är att skära ut topp och botten från en hexagon (regelbunden 6-hörning) med bredd  $2r$ . Det är inte så svårt att räkna ut att arean av en sådan hexagon ges av  $2\sqrt{3}r^2$  areaenheter. Alltså vill vi nu minimera

$$K(r) = 4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh = 4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Således blir

$$K'(r) = 8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2} = \frac{8\sqrt{3}r^3 - 2V}{r^2}.$$

Den stationära punkten  $r$  uppfyller nu  $r^3 = \frac{V}{4\sqrt{3}}$  vilket ger

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

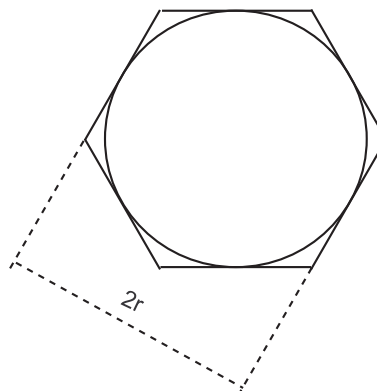
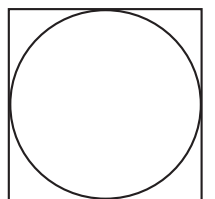
### Klister? Svets?

Modellen ovan med hexagoner kanske ger en acceptabel materialförlust, men det är inte rimligt att tro att kostnaden för att tillverka burkarna enbart är en materialkostnad. Delarna skall också fogas samman - en fog för att göra en cylinderkropp och en fog vardera för topp och botten. Ett rimligt antagande är att kostnaden för fogningen är proportionell mot foglängden, dvs. proportionell mot

$$h + 2 \cdot 2\pi r = h + 4\pi r$$

Den totala kostnaden kan då skrivas

$$K = 4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(h + 4\pi r)$$



där  $k$  är en proportionalitetskonstant, som är ett mått på hur mycket sammanfogningen kostar jämfört med materialkostnaden. Vi eliminerar som vanligt  $h = \frac{V}{\pi r^2}$  och får då

$$K(r) = 4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r} + k \left( \frac{V}{\pi r^2} + 4\pi r \right)$$

och

$$K'(r) = 8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2} + k \left( -2\frac{V}{\pi r^3} + 4\pi \right).$$

Följaktligen,

$$\begin{aligned} K'(r) = 0 &\Leftrightarrow k \left( -2\frac{V}{\pi r^3} + 4\pi \right) = \frac{2V}{r^2} - 8\sqrt{3}r \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{k} = \frac{-2\frac{V}{\pi r^3} + 4\pi}{\frac{2V}{r^2} - 8\sqrt{3}r} = \frac{-\frac{V}{\pi r^3} + 2\pi}{\frac{V}{r^2} - 4\sqrt{3}r} \end{aligned}$$

Om vi nu använder sambandet

$$\frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3}$$

så fås

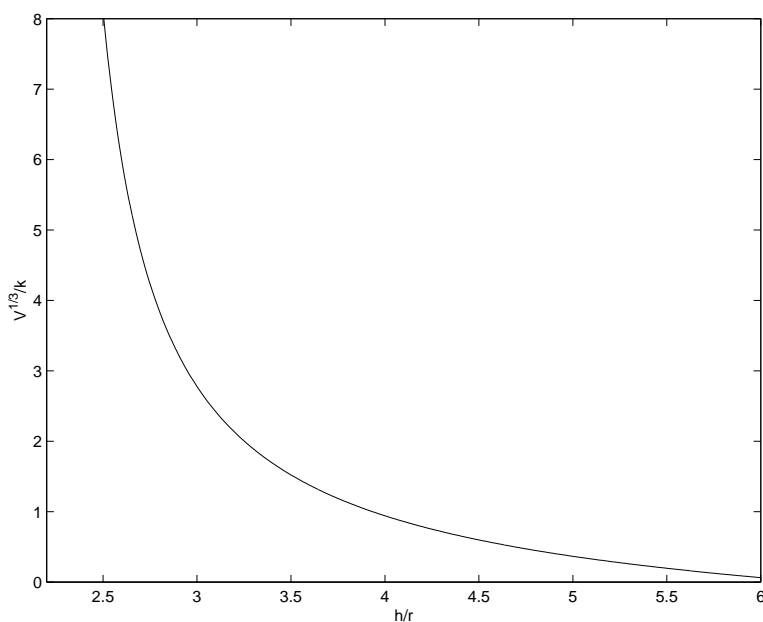
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{r} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

eller (ty  $V^{1/3}/r = (\pi h/r)^{1/3}$ )

$$\frac{V^{1/3}}{k} = \left( \frac{\pi h}{r} \right)^{1/3} \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}.$$

Kostnaden minimeras alltså då kvoten  $\frac{h}{r}$  uppfyller ovanstående samband. Nedanstående figur visar en plott av vänsterledet  $\frac{V^{1/3}}{k}$  som funktion av  $x = \frac{h}{r}$ ;

Vi ser att för stora burkar (stor volym) eller för burkar där sammanfogningskostnaden är liten jämfört med materialkostnaden så lönar det sig att låta kvoten  $\frac{h}{r}$  vara nära  $\frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$  dvs. burken blir då nästan kvadratisk. För små burkar däremot, eller för burkar där sammanfogningskostnaden är betydande, så lönar det sig att låta  $\frac{h}{r}$  vara större, dvs. burken bör då vara hög och smal istället.



## 1.2 Ränta på ränta

### Hur mycket pengar blir det?

Om vi vill låta en bank ta hand om vårt kapital, säg  $K$  kronor mot en årsränta  $r$  så har vi efter ett år  $K(1+r)$  kronor, efter två år så har vi  $K(1+r)(1+r) = K(1+r)^2$  kronor, och efter  $N$  år har vi

$$K(1+r)^N$$

kronor på vårt konto. Till exempel kan vi då räkna ut hur många år det tar att dubbla kapitalet; vi söker alltså  $N^*$  så att

$$K(1+r)^{N^*} = 2K \Leftrightarrow N^* = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}.$$

Observera att fördubblingstiden  $N^*$  enbart beror på räntesatsen. Om  $r = 0.05 = 5\%$  så blir

$$N^* = \frac{\ln 2}{\ln(1+0.05)} \approx 14$$

dvs. det tar då ca. 14 år för vårt kapital att fördubblas.

### Ränta på ränta på ränta på . . .

Kalkylerna ovan bygger på en årlig ränteberäkning då räntan räknas ut och läggs till kapitalet. Mer rättvist (om man inte är bankdirektör) är att räntan beräknas oftare. Om vi beräknar räntan varje kvartal så har vi efter 1 år  $K(1 + \frac{r}{4})^4$  kronor och efter  $N$  år är vårt kapital

$$K(1 + \frac{r}{4})^{4N}$$

kronor. Om vi istället beräknar räntan varje månad så har vi efter  $N$  år

$$K \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12N}$$

kronor. Exempelvis om vi sätter in 10000 kronor med räntesatsen  $r = 0.05 = 5\%$  så har vi efter 1 år

$$10000(1 + 0.05) = 10500 \quad \text{kronor om vi beräknar räntan vid årets slut}$$

$$1000 \left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^4 \approx 10509 \quad \text{kronor om vi beräknar räntan kvartalsvis}$$

$$1000 \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} \approx 10511 \quad \text{kronor om vi beräknar räntan månadsvis}$$

Man kan nu tänka sig en modell där vi beräknar räntan i "varje ögonblick", dvs. en *kontinuerlig* ränteberäkning. Efter ett år skulle vi med  $n$  ränteberäkningar ha kapitalet

$$K \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

kronor. En kontinuerlig modell får vi alltså om vi nu låter  $n \rightarrow \infty$  dvs. kapitalet blir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Vad är då detta, kan vi beräkna gränsvärdet? Ja, om vi använder det kända gränsvärdet

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  så får vi kapitalet till att bli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = K \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r} \right)^r = Ke^r \text{ kronor.}$$

Till exempel om  $K = 10000$ ,  $r = 0.05 = 5\%$  som i exemplet ovan så får vi med kontinuerlig ränteberäkning kapitalet  $10000e^{0.05} \approx 10513$  kronor. Man säger att den *effektiva* räntan är då 5.13%. Efter  $N$  år har vi med denna modell  $Ke^{rN}$  kronor; fördubblingstiden blir nu  $N^* = \ln 2/r$  och med  $r = 0.05$  så ger detta  $N^* \approx 13.9$  år.

### En differentialekvation

Ett alternativt sätt att komma fram till den kontinuerliga modellen är följande. Låt  $f(t)$  vara vårt kapital vid tiden  $t$  så att  $f(0) = K$ . Låt sedan  $\Delta t$  vara tidsintervallet mellan två ränteberäkningar; vi vill alltså låta  $\Delta t \rightarrow 0$ . Under tidsintervallet från  $t$  till  $t + \Delta t$  ökar vårt kapital enligt

$$f(t + \Delta t) = f(t)(1 + r\Delta t)$$

vilket kan omformas till

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t).$$

Om vi nu låter  $\Delta t \rightarrow 0$  så får vi differentialekvationen

$$f'(t) = rf(t).$$

Detta är en linjär första ordningens differentialekvation som dyker upp i alla möjliga sammanhang där vi har att göra med någon form av tillväxt. Ekvationen har den allmänna lösningen

$$f(t) = Ce^{rt}$$

där  $C$  är en integrationskonstant. Tillsammans med begynnelsevillkoret  $f(0) = K$  så får vi  $C = K$  och därmed har vi alltså funnit att

$$f(t) = Ke^{rt}$$

är vårt kapital efter tiden  $t$ .

### 1.3 Grottan Lascaux

När en växt eller djur lever så är andelen  $^{14}\text{C}$  i dess vävnader konstant, och denna konstant är samma för alla levande organismer. När organismen dör sönderfaller denna andel med en halveringstid på 5730 år, vilket man kan använda sig av för att åldersbestämma upphittade objekt. I den berömda grottan Lascaux i Frankrike (som 5 vänner bokstavligen "snubblade" in i år 1940 då de var ute på en hundpromenad) fann man vad många anser vara världens vackraste grottmålningar. Man fann andra bevis på människors närvaro och i dessa föremål var  $^{14}\text{C}$ -halten ca. 14.5% av det ursprungliga värdet. Hur gamla var dessa objekt?

#### En matematisk modell av radioaktivt sönderfall

Ett mycket rimligt antagande är att sönderfallshastigheten hos ett radioaktivt ämne är direkt proportionell mot kvantiteten av detta ämne, dvs. om  $m(t)$  är mängden radioaktiv substans vid tiden  $t$  så bör

$$m'(t) = -km(t)$$

för någon konstant  $k > 0$ . Det är en linjär första ordningens differentialekvation (som vi såg i ränteexemplet tidigare) och den har lösningen  $m(t) = Ce^{-kt}$  för någon konstant  $C$ . Om vi vid tiden  $t = 0$  har mängden  $m_0$  radioaktivt material så får vi  $C = m_0$  och följaktligen

$$m(t) = m_0e^{-kt}$$

Om nu ämnets halveringstid är  $T$  (år) så måste

$$\frac{1}{2}m_0 = m(T) = m_0e^{-kT} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kT}$$

vilket ger  $k = \ln 2/T$ . Alltså:

$$m(t) = m_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

#### Hur gamla var fynden?

För  $^{14}\text{C}$  är halveringstiden  $T = 5730$  år och för objekten i Lascaux gäller därmed

$$m(t) = m_0e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

Om  $t_0$  är den tid som har passerat sedan fynden var levande organismer (t.ex. träd) så gäller enligt uppgifterna ovan att

$$0.145m_0 = m(t_0) = m_0e^{-\frac{\ln 2}{5730}t_0} \Leftrightarrow 0.145 = e^{-\frac{\ln 2}{5730}t_0}$$

Här löser man nu enkelt ut  $t_0$ ;

$$t_0 = -\frac{5730 \ln 0.145}{\ln 2} \approx 16000 \text{ år}$$

*Anmärkning.* Grottan Lascaux öppnades för turister mycket snart efter 2:a världskrigets slut; öppningen (som var väldigt liten ursprungligen) breddades och man tog emot upp till 1200 turister varje dag. Snart (1955) märktes dock de första tecknen på att målningarna tog skada - den stora mängden koldioxid i utandningsluften från turisterna började att bryta ned målningarna. Man tog därför 1963 beslutet att stänga grottan för turister.



## 1.4 Hjärtats pumpförmåga

Bestämning av flödes hastigheten för en vätska i (t.ex.) ett rör, dvs. mängden vätska som per tidsenhet passerar ett tvärsnitt av röret, har många tillämpningar. Alltifrån miljöfrågor där olika vattendrag är inblandade till medicinska diagnoser. I det sistnämnda fallet kan man t.ex. för att uppskatta hjärtats förmåga att cirkulera blodet i våra vener försöka bestämma blodets flödes hastighet. Man talar om begreppet CO som står för Cardiac Output och är den mängd blod som per minut genomströmmar hjärtat. För en man som väger 70 kg ligger ett typiskt CO-värde mellan 5 och 7 liter per minut.

### Beräkning av flödes hastigheter

En vanlig metod för att bestämma konstanta flödes hastigheter går ut på att tillsätta ett färgämne och därefter periodiskt mäta koncentrationen av detta ämne vid en fixerad punkt utefter flödets riktning. Antag att vi tillsätter färgämnet vid tiden  $t = 0$  och att vid tiden  $t = T$  så har allt färgämne passerat vår mätpunkt, dvs. om  $c(t)$  är koncentrationen (vid mätpunkten) av färgämnet vid tiden  $t$  så finner vi att  $c(T) = 0$  (i någon lämplig enhet, t.ex. mg/l). Vi delar nu in intervallet  $[0, T]$  i  $n$  lika stora tidsintervall

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$$

av längd  $\Delta t = t_i - t_{i-1} = T/n$  och antar att vi har mätt koncentrationerna  $c(t_1), c(t_2), \dots, c(t_n)$ . Då kan vi uppskatta mängden färgämne som passerar vår mätpunkt under ett delintervall  $[t_{i-1}, t_i]$  enligt följande. Låt  $F$  vara den ej kända flödes hastigheten, och låt  $\Delta V_i$  vara volymen vätska (t.ex. blod) som passerar mätpunkten under ett delintervall. Eftersom  $F$  antas vara konstant så måste

$$\Delta V_i = F \Delta t.$$

Typiska enheter kan t.ex. vara  $\text{cm}^3/\text{s}$  för flödes hastigheten  $F$  om vi mäter volymen i  $\text{cm}^3$ . Om  $\Delta A_i$  (mätt i t.ex. mg) är mängden färgämne som under delintervallet  $[t_{i-1}, t_i]$  passerar mätpunkten så får vi approximativt att

$$\Delta A_i \approx c(t_i) \Delta V_i = c(t_i) F \Delta t.$$

Approximationen består här i antagandet att koncentrationen  $c(t_i)$  är ungefär konstant under delintervallet  $[t_{i-1}, t_i]$ . Denna approximation är acceptabel om  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  är litet och approximationen blir självklart bättre ju mindre  $\Delta t$  blir. Nu känner vi den totala mängden tillsatt färgämne  $A$  och eftersom allt färgämne passerat vid tiden  $t = T$  så får vi därför sambandet

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \approx F \sum_{i=1}^n c(t_i) \Delta t = F \sum_{i=1}^n c(t_i) \frac{t_i - t_{i-1}}{n}.$$

Observera nu att summan i högerledet är en Riemannsumma! Därför låter vi  $n \rightarrow \infty$ , (och därmed  $\Delta t \rightarrow 0$ ) och drar slutsatsen att

$$A = F \int_0^T c(t) dt.$$

Nu kan flödes hastigheten beräknas som

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}$$

och integralen kan beräknas approximativt genom att använda de uppmätta värdena  $c(t_1), \dots, c(t_n)$ , t.ex. med Simpsons formel

$$\int_0^T c(t) dt \approx \frac{\Delta t}{3} (c(t_0) + 4c(t_1) + 2c(t_2) + 4c(t_3) + \dots + 2c(t_{n-2}) + 4c(t_{n-1}) + c(t_n))$$

(Här har vi antagit att antalet delintervall  $n$  är ett jämnt tal).

### Ett kirurgiskt ingrepp

Låt oss titta på ett numeriskt exempel: Vid en operation injiceras 6 mg av ett färgämne i hjärtat på patienten. Man mäter sedan varannan sekund koncentrationen av detta ämne vid ett ställe i aortan. Tabellen nedan visar de uppmätta koncentrationerna i mg/l. Vi försöker att uppskatta patientens CO-värde.

|        |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |    |
|--------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| $t$    | 0 | 2    | 4    | 6    | 8    | 10   | 12   | 14   | 16   | 18   | 20 |
| $c(t)$ | 0 | 1.93 | 8.17 | 9.00 | 6.34 | 3.65 | 1.84 | 0.88 | 0.39 | 0.15 | 0  |

Med beteckningarna ovan gäller  $A = 6$  mg,  $T = 20$  s och  $\Delta t = 2$  s. Simpsons formel ger

$$\begin{aligned}\int_0^{20} c(t) dt &\approx \frac{2}{3}(0 + 4 \cdot (1.93) + 2 \cdot (8.17) + 4 \cdot (9.00) + 2 \cdot (6.34) + 4 \cdot (3.65) + 2 \cdot (1.84) \\ &\quad + 4 \cdot (0.88) + 2 \cdot (0.39) + 4 \cdot (0.15) + 0) \\ &\approx 63.95\end{aligned}$$

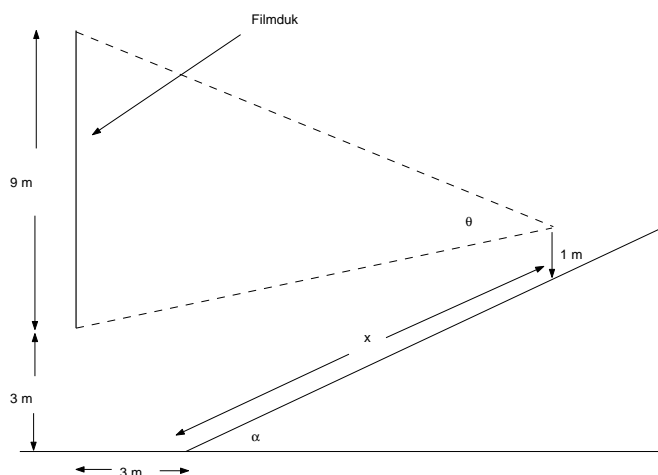
Enligt ovan fås därför

$$F = \frac{A}{\int_0^{20} c(t) dt} \approx \frac{6}{63.95} \approx 0.0938 \text{ l/s}$$

vilket ger ett CO-värde på ca. 5.63 l/m för denna patient.

### 1.5 Var finns biosalongens bästa plats?

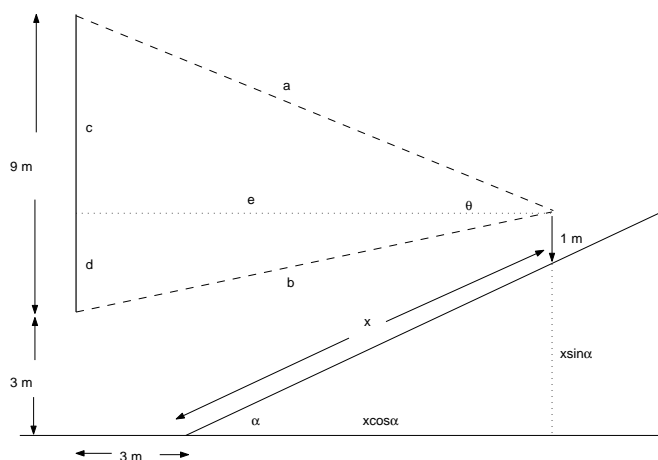
Var skall man sätta sig i en biosalong om man vill se bra som möjligt? Ja, först får man väl tänka efter en smula vad som det innebär att se så "bra" som möjligt, men en idé kan ju vara att försöka sätta sig där ens synfält maximeras, dvs. vi vill finna den plats som maximerar vinkeln  $\theta$  i figuren nedan.



För att få en explicit situation att räkna på har vi här tänkt oss en biograf med en 9 m hög filmduk placerad 3 m ovanför marken och 3 m från den första raden stolar. De flesta biografier är numera gradängsalar och vi antar att lutningen på stolarean är  $20^\circ$  dvs. vinkeln  $\alpha = \pi/9$  radianer. Om biografen har 21 rader stolar och om det är en meter mellan varje rad så innebär det att  $0 \leq x \leq 20$  i figuren ovan. Slutligen antar vi också att dina ögon befinner sig ca. 1 m ovanför golvet.

#### Problemets geometri

Vi inför ytterligare några beteckningar i figuren;



Cosinussatsen ger

$$9^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \Leftrightarrow \theta = \arccos \left( \frac{a^2 + b^2 - 81}{2ab} \right)$$

där

$$a^2 = c^2 + e^2 = (11 - x \sin \alpha)^2 + (3 + x \cos \alpha)^2$$

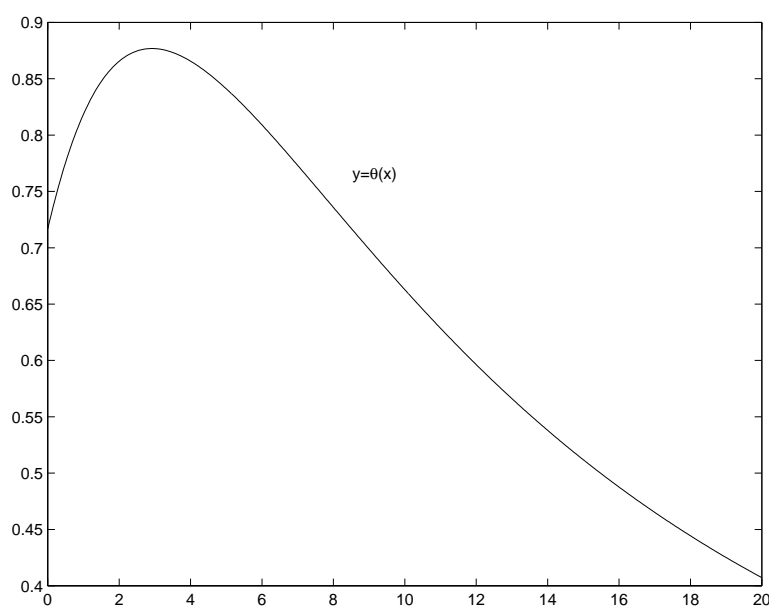
och

$$b^2 = d^2 + e^2 = (x \sin \alpha - 2)^2 + (3 + x \cos \alpha)^2$$

Alltså kan vi skriva

$$\theta(x) = \arccos \left( \frac{(11 - x \sin \alpha)^2 + (3 + x \cos \alpha)^2 + (x \sin \alpha - 2)^2 + (3 + x \cos \alpha)^2 - 81}{2\sqrt{(10 - x \sin \alpha)^2 + (3 + x \cos \alpha)^2}\sqrt{(x \sin \alpha - 2)^2 + (3 + x \cos \alpha)^2}} \right)$$

Tydligen är  $\theta(x)$  en ganska komplicerad funktion; dess graf för  $0 \leq x \leq 20$  ser ut enligt nedan;



Vi ser att det finns ett maximum någonstans nära 3 - alltså bör man i vår biograf sätta sig på den tredje stolsraden!

### Exakt lösning

Med hjälp av MATLAB och dess symbolhanterande rutiner (lånade från MAPLE), så ger vi oss ikast med att derivera  $\theta(x)$  för att finna ett exakt värde; man får

$$\theta'(x) = \frac{(-9 \cos^3 \alpha - 9 \sin^2 \alpha \cos \alpha) x^2 + (-54 \cos^2 \alpha - 54 \sin^2 \alpha) x + 117 \cos \alpha + 351 \sin \alpha}{(x^2 + (-22 \sin \alpha + 6 \cos \alpha) x + 130) (x^2 + (-4 \sin \alpha + 6 \cos \alpha) x + 13)}$$

Vi låter MATLAB beräkna den positiva roten till ekvationen  $\theta'(x) = 0$  och får lösningen

$$x = \frac{6 \cos \alpha - 2\sqrt{9 \cos^2 \alpha + 13 \sin^4 \alpha - 39 \sin^3 \alpha \cos \alpha - 26 \sin^2 \alpha + 39 \cos \alpha \sin \alpha + 13}}{2(\sin^2 \alpha - 1)} \\ \approx 2.92$$

vilket verifierar vårt påstående ovan om tredje raden som bästa plats.

## 1.6 Vilket tar längst tid - upp eller ned?

Antag att vi från jordytan kastar ett föremål rakt uppåt. Låt  $t_1$  vara den tid det tar för föremålet att nå sin maximala höjd och låt  $t_2$  vara den tid det tar för föremålet att återvända till jordytan från sin maximala höjd. Vilken av relationerna

$$t_1 > t_2, \quad t_1 = t_2, \quad \text{eller} \quad t_1 < t_2$$

tror du är sann? Om t.ex.  $t_1 < t_2$  så innebär det alltså att det tar längre tid för föremålet att komma tillbaka till jordytan än det tar för föremålet att nå sin maximala höjd.

### En matematisk modell

Vi antar att föremålet som har massan  $m$  kastas vertikalt från jordytan med begynnelsehastigheten  $v_0$  m/s. Tyngdaccelerationen (som förutsättes vara konstant) betecknas  $g$ . Låt  $v(t)$  vara föremålets hastighet vid tiden  $t$ , vi räknar positiv riktning uppåt, och låt  $h(t)$  vara föremålets höjd vid tiden  $t$ .

Man har experimentellt verifierat (för hastigheter upp till ca. 100 m/s) att bromskraften p.g.a luftmotstånd kan approximativt sägas vara proportionell mot föremålets hastighet. Alltså kan vi skriva  $F_{\text{luft}}(v) = -kv$  där  $k$  är en proportionalitetskonstant som t.ex. beror på föremålets geometri. Om vi tar med detta i våra beräkningar så leder Newtons andra lag till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} mv'(t) = -kv(t) - mg \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Detta är en linjär 1:a ordningens differentialekvation som kan skrivas

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = -g$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn  $e^{kt/m}$  får vi

$$\frac{d}{dt} \left( e^{kt/m} v(t) \right) = -e^{kt/m} g \Leftrightarrow v(t) = C e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}$$

Integrationskonstanten  $C$  bestäms av begynnelsevillkoret  $v(0) = v_0$ ;

$$v_0 = C - \frac{mg}{k}$$

och därmed

$$v(t) = \left( v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}$$

För att finna  $t_1$  löser vi ekvationen  $v(t_1) = 0$ ;

$$0 = \left( v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-kt_1/m} - \frac{mg}{k} \Leftrightarrow t_1 = \frac{m}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0}{mg} \right)$$

Integration av  $v(t)$  ger (efter utnyttjande att  $h(0) = 0$ )

$$h(t) = \left( v_0 + \frac{mg}{k} \right) \frac{m}{k} \left( 1 - e^{-kt/m} \right) - \frac{mg}{k} t$$

Att finna  $t_2$  blir nu en smula problematiskt eftersom ekvationen  $h(t) = 0$  inte kan lösas explicit. Vi kan dock undgå detta problem genom undersöka  $h(2t_1)$ . Om vi utnyttjar att

$$v(t_1) = 0 \Leftrightarrow v_0 + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k} e^{kt_1/m}$$

så får vi att

$$\begin{aligned}
 h(2t_1) &= \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) \frac{m}{k} \left(1 - e^{-k2t_1/m}\right) - \frac{mg}{k} 2t_1 \\
 &= \frac{mg}{k} e^{kt_1/m} \frac{m}{k} \left(1 - e^{-k2t_1/m}\right) - \frac{mg}{k} 2t_1 \\
 &= \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{kt_1/m} - e^{-kt_1/m}\right) - \frac{mg}{k} 2t_1 \\
 &= \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{kt_1/m} - e^{-kt_1/m} - \frac{2kt_1}{m}\right) \\
 &= \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{kt_1/m} - e^{-kt_1/m} - 2 \ln\left(e^{kt_1/m}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Om vi nu låter

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln(x)$$

så gäller därmed att

$$h(2t_1) = \frac{m^2 g}{k^2} f\left(e^{kt_1/m}\right)$$

Funktionen  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  är enkel att derivera;

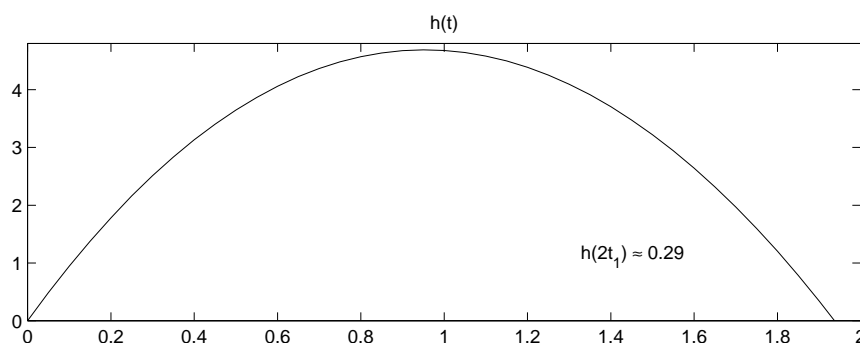
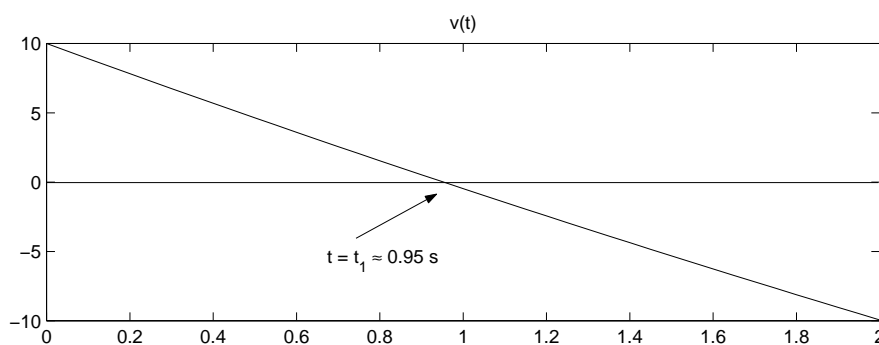
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

Alltså gäller att  $f'(x) > 0$  för  $x > 1$  och därmed är funktionen  $f$  strängt växande för  $x > 1$ . Eftersom  $f(1) = 0$  så betyder det att  $f(x) > 0$  för alla  $x > 1$ . Men då följer att (ty  $e^{kt_1/m} > 1$ )

$$h(2t_1) = \frac{m^2 g}{k^2} f\left(e^{kt_1/m}\right) > 0$$

Alltså kan vi dra slutsatsen att det tar längre tid på "nedvägen", dvs.  $t_1 < t_2$ . Fysikaliskt kan detta förklaras med att bromskraften på vägen upp utgörs av både tyngdkraften och luftmotstånd, medans på nedvägen är det endast luftmotståndet som bromsar.

Om vi gör en numerisk illustration med  $m = 1$  kg,  $v_0 = 10$  m/s,  $k = 0.1$  Ns/m och  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> så ser kurvorna ut enl. nedan.



### Utan luftmotstånd

Om vi förenklar vårt problem och försummar luftmotståndet så fås begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} mv'(t) = -mg \\ v(0) = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'(t) = -g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

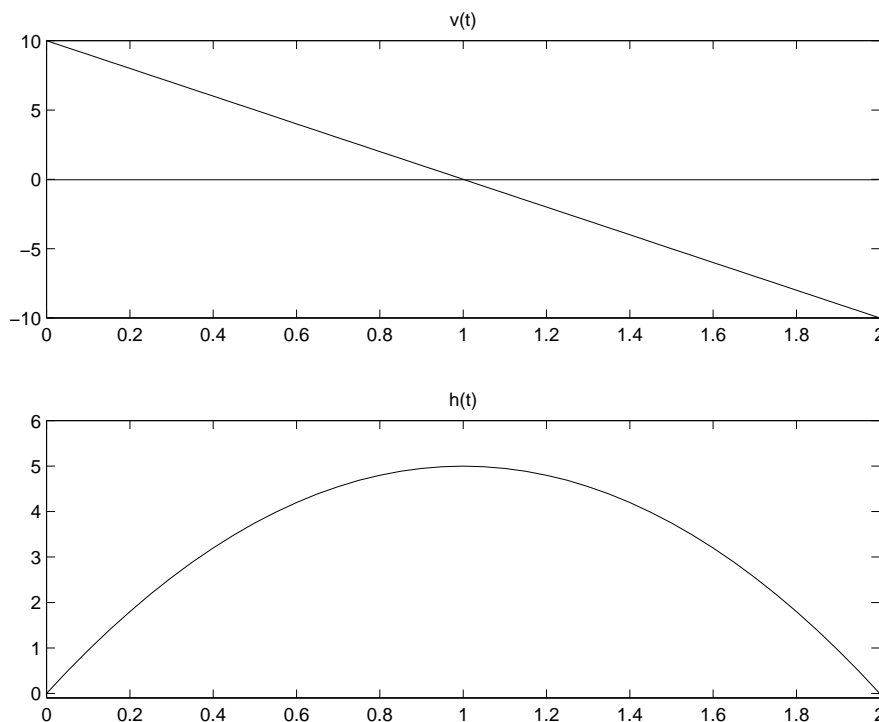
Integration ger  $v(t) = v_0 - gt$ , och tiden  $t_1$  fås som lösningen till ekvationen

$$v(t_1) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$$

Eftersom  $h'(t) = v(t)$  så ger ytterligare en integration att  $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ , och därmed

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ eller } t = 2\frac{v_0}{g} = 2t_1$$

dvs. här gäller alltså  $t_2 = t_1$ , dvs. det tar lika lång tid "upp" som "ned". Fysikaliskt ganska självklart eftersom den bromsande kraften på vägen upp (tyngdkraften) är exakt lika stor till sitt belopp som den accelererande kraften på vägen ned. Ett numeriskt experiment, med liknande data som ovan ger följande resultat.



Eftersom

$$h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{g}{2} \left( t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} = -\frac{g}{2} (t - t_1)^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

så ser vi att kurvan för  $h(t)$  är symmetrisk kring  $t_1$ , dvs.  $h(t_1 - t) = h(t + t_1)$ .

## 1.7 Förfäder och riskorn

### Släktforskning?

Antag att vi vill räkna ut hur många "direkta" förfäder, dvs. föräldrar, mor och far-föräldrar etc. som vi har om vi tittar tillbaka, låt oss säga exempelvis 300 år. Klart är att vi har 2 föräldrar. Var och en av dessa har två föräldrar dvs. vi har  $2^2 = 4$  mor- och far-föräldrar. I nästa steg har var och en av dessa två föräldrar vilket ger oss ytterligare  $2^3 = 8$  förfäder. Alltså, om vi tittar tillbaka  $n$  generationer så har vi totalt

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = \sum_{i=1}^n 2^i$$

förfäder. Detta är en s.k. *geometrisk serie* och det finns ett enkelt sätt att beräkna en sådan summa. Om vi kallar summan  $s_n$  så gäller ju nämligen att

$$\begin{aligned} s_n &= s_n(2 - 1) = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n)(2 - 1) \\ &= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+1} - (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n) \\ &= 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

Låt oss nu besvara frågan ovan. Om vi tänker oss att en ny generation uppstår ungefär vart 25:e år så går det 12 generationer på 300 år. Antalet förfäder som vi har när vi tittar tillbaka 300 år blir då

$$s_{12} = 2^{12+1} - 2 = 2^{13} - 2 = 8190$$

ett inte alltför litet antal alltså!

### Mera ris!

Ett annat (mer berömt) exempel där denna summa dyker upp är i sagan där hjälten begärde följande belöning av konungen som tack för uträttat hjältedåd. Konungen skulle ge vår hjälte ett antal riskorn, nämligen 1 riskorn för första rutan i ett schackbräde, 2 riskorn för den andra rutan, 4 för den tredje och så vidare; hela tiden dubbelt så många riskorn som i den föregående schackrutan. Hur många riskorn skulle Konungen hosta upp? Ett schackbräde har 64 rutor vilket ger oss antalet riskorn som summan

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 1 + s_{63} = 1 + 2^{64} - 2 = 18446744073709551615 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$$

Man kan lugnt säga att Konungen hade en svår uppgift - så mycket ris finns inte på hela jordklotet. Man kan uppskatta att antalet riskorn per kubikmeter är ca. 15 miljoner dvs.  $15 \cdot 10^6$ . Så Konungens rismängd motsvarar alltså ca.  $1.8 \cdot 10^{19} / 15 \cdot 10^6 \approx 1.2 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$ . Sveriges area är ca.  $411000 \text{ km}^2$ . Om man fördelar riset jämnt över Sverige så blir ristäckets nästan 3 m högt! Ett annat sätt att betrakta denna rismängd är följande. Ett riskorn är ca. 4 mm långt. Om man la ut alla riskorn efter varandra på rad, hur lång blir denna rislinje? En enkel beräkning ger att längden blir ungefär  $7.4 \cdot 10^{12} \text{ km}$ . Eller, annorlunda uttryckt, ungefär 7.8 ljusår!



## 1.8 Division utan att dividera

### En algoritm à la Newton

Antag att vi vill konstruera en algoritm för att med en dator snabbt beräkna  $b/a$  där  $a, b$  är givna reella tal. Betrakta då funktionen

$$f(x) = x - \frac{1}{a}.$$

Uppenbart är att  $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{a}$ , dvs. om  $f(\alpha^*) \approx 0$  så är  $\alpha^* \approx \frac{1}{a}$  och därmed är

$$\frac{b}{a} \approx b \cdot \alpha^*.$$

Vi kan alltså dividera genom att enbart använda multiplikation. Så, hur finner vi  $\alpha^*$  utan att dividera? Newtons metod ger en möjlighet och algoritmen som vi nu skall ta fram användes faktiskt initialt av datorer för att approximera division. Enligt Newtons metod så ger iterationsschemat

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

med startgissningen  $x_0$  en talföljd  $x_0, x_1, x_2, \dots$  som snabbt konvergerar mot roten  $\alpha$  bara  $x_0$  är "tillräckligt nära"  $\alpha$  från början (man kan visa att konvergensen är i allmänhet s.k. *kvadratisk*, vilket innebär att man vid varje iterationssteg vinner lika många decimaler som man redan har). I vårt fall blir iterationsschemat

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a - \frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_n^2}} = x_n(2 - ax_n).$$

Intressanta frågor är nu givetvis för vilka startvärden  $x_0$  denna iteration konvergerar, och isåfall hur snabb är konvergensen?

### Lite numerisk analys

En dator kan representera ett flyttal på formen  $a = q \cdot 2^{t-p}$  där vanligen  $-63 \leq t-p \leq 64$  och där  $q$  har normaliserats så att  $q \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Därför kan vi antaga att  $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ , vilket förenklar analysen. Vi definierar nu den s.k. *residualen*

$$r_n = 1 - ax_n,$$

och observerar att *felet*  $e_n$  i den  $n$ :te iterationen då uppfyller

$$e_n = \alpha - x_n = \frac{r_n}{a} = \frac{1}{a} - x_n.$$

Alltså gäller att  $r_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow e_n \rightarrow 0$ . Vidare så får vi nu att

$$r_{n+1} = 1 - ax_{n+1} = 1 - ax_n(2 - ax_n) = 1 - ax_n(1 + r_n) = 1 - (1 - r_n)(1 + r_n) = r_n^2,$$

och därmed  $r_n = r_{n-1}^2 = r_{n-2}^4 = \dots = r_0^{2^n}$ . Detta betyder att om  $|r_0| < 1$  så kommer  $r_n \rightarrow 0$ , och väldigt snabbt dessutom. Felet uppfyller

$$|e_{n+1}| = |ae_n^2| = ae_n^2$$

dvs. vi har kvadratisk konvergens bara  $|r_0| < 1$ . För att uppfylla detta villkor måste vi välja  $x_0$  så att

$$0 < x_0 < \frac{2}{a} = 2\alpha.$$

Hur åstadkommer vi detta? Ett enkelt sätt är följande. Låt oss approximera funktionen  $f(x) = x^{-1}$  på intervallet  $[\frac{1}{2}, 1]$  genom att använda linjär interpolering, dvs. vi använder den räta linje som går genom punkterna  $(\frac{1}{2}, 2)$  och  $(1, 1)$ . Denna linje har ekvationen  $g(x) = 3 - 2x$  vilket ger  $x_0 = g(a) = 3 - 2a$ . Uppfyller detta val villkoret ovan? Med hjälp av medelvärdesatsen kan man ganska enkelt visa att den linjära interpoleringen  $g(x)$  till  $f(x)$  på intervallet  $[x_0, x_1]$  uppfyller

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)|.$$

I vårt fall är

$$\max_{1/2 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \max_{1/2 \leq x \leq 1} \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq 16$$

dvs. på intervallet  $[\frac{1}{2}, 1]$  gäller

$$\left| \frac{1}{x} - (3 - 2x) \right| \leq \frac{1}{8} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot 16 = \frac{1}{2}.$$

Speciellt så gäller då att

$$\left| \frac{1}{a} - (3 - 2a) \right| \leq \frac{1}{2}$$

och därmed  $|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$  vilket är ekvivalent med att  $|r_0| = a|e_0| \leq a\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ . Därmed får vi säkert snabb konvergens om vi väljer  $x_0 = 3 - 2a$ . Det relativa felet uppfyller

$$\left| \frac{e_0}{\alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

och efter endast 6 iterationer (totalt 21 räkneoperationer) har vi ett relativt fel i storleksordningen  $10^{-20}$ .

Vi testkör; låt  $a = 0.8$  så att vi försöker approximativt beräkna  $(0.8)^{-1} = 1.25$ . Den linjära interpolanten  $3 - 2x$  ger oss startvärdet

$$x_0 = 3 - 2 \cdot 0.8 = 1.4.$$

Newtoniterationen ovan ger sedan (i MATLAB)

$$x_1 = x_0(2 - 0.8x_0) = 1.232$$

$$x_2 = x_1(2 - 0.8x_1) = 1.2497408$$

$$x_3 = x_2(2 - 0.8x_2) = 1.24999994625229$$

$$x_4 = x_3(2 - 0.8x_3) = 1.250000000000000$$

Endast 4 iterationer (14 operationer) krävs för konvergens. Faktum är att det linjära interpolationsfelet är här en ganska grov uppskattning som är långt större än det verkliga felet, men det är en annan historia.

## 2 Linjär algebra

1949 försökte professorn Wassily Leontief (Harvard) att testa sin matematiska modell för den amerikanska ekonomin. Han använde sig av universitetets mest kraftfulla dator Mark II och matade in data i form av hålkort. Informationen på korten representerade en sammanställning av mer än 250000 olika statistiska data. Leontief hade delat in den amerikanska ekonomin i 500 olika sektorer - kolindustrin, bilindustrin, kommunikationer etc. Varje sektor modellerades med en linjär ekvation som beskrev hur den sektorn samverkade med de övriga 499 sektorerna. Dessvärre kunde inte Mark II hantera det ekvationssystem som blev resultatet, systemet hade 500 ekvationer och lika många variabler vilket var en omöjlig uppgift för denna dator. Leontief tvingades därför att förenkla sin modell till att omfatta 42 ekvationer i lika många variabler. Det tog ändå 56 timmar innan datorn kunde presentera en lösning.

Leontief fick 1973 Nobelpriset i ekonomi för sina matematiska modeller och han var en de första som utforskade tillämpningar av det som vi idag kallar linjär algebra.

I takt med datorutvecklingen har denna matematik blivit allt viktigare och idag resulterar så gott som varje matematisk modell i ett linjärt ekvationssystem i slutändan. Dagens datorer har naturligtvis inte samma begränsningar som 1949 - vi kan nu hantera ekvationssystem med tusentals ekvationer och obekanta. Några exempel på tillämpningsområden följer nedan.

- Den s.k. *minsta kvadratmetoden* är en av de mest använda beräkningsalgoritmerna som existerar. I korthet så går den ut på att finna den "bästa" lösningen till ett överbestämt linjärt ekvationssystem. T.ex. så kan man finna den "bästa" linjära modellen för en datamängd som kommer från en serie experiment.
- Från den datamängd som erhålls vid moderna röntgenmetoder såsom t.ex. magnetröntgen skapas en digital bild av ett tvärsnitt av människokroppen. Denna bild konstrueras via analys av ett överbestämt linjärt ekvationssystem. Minsta kvadratmetoder är viktiga här.
- Molekyler (t.ex. ett protein) kan modelleras genom att bryta ned dem i ett ändligt antal objekt (atomer) som kopplas ihop via attraherande och repellerande krafter. På samma sätt kan t.ex. en bro beskrivas. I båda fallen beskrivs systemets vibrationer av en differentialekvation på matrisform. Matrisens egenvärden svarar mot systemets egenfrekvenser.
- En situation där vissa egenskaper för en art som ärvs från generation till generation kan matematiskt beskrivas med en matrismodell. Liknande modeller som tar hänsyn till olika begränsande och stimulerande faktorer används för studier av olika populationer. En fiskodlare eller en skogsförvaltare kan med hjälp av sådana modeller beräkna optimala nivåer för skörd och sådd.
- I många sammanhang är det intressant att försöka hitta maximum eller minimum av en given funktion  $f(x)$  under vissa bivillkor  $g(x)=0$ . Om  $f$  och  $g$  är linjära funktioner så resulterar detta i att lösa ett linjärt ekvationssystem. T.ex. kan man försöka hitta den optimala blandningen av komponenter till en produkt, där proportionerna tillåts att variera inom vissa gränser.
- Bild- (t.ex. JPG), video- (t.ex. MPG4) och ljudkomprimeringsalgoritmer (t.ex. MP3) använder Fouriertransformer som är ett exempel på linjära avbildningar. Typiskt så delas materialet upp i små delar som sedan representeras som en vektor. Denna vektor transformeras med en linjär avbildning och man behåller bara den information som är nödvändig för att lura vår hjärna

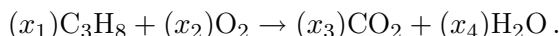
- 
- Dynamiska processer med förutbestämda “regler” (som kan bero på slumpen) kan kallas för ett spel. Inom spelteorin försöker man modellera sådana situationer och komma fram till optimala strategier för varje enskild spelare. I dessa matematiska modeller används bl.a. matriser.
  - En datorbild kan representeras som en vektor där varje element svarar mot en pixel. I en flygsimulator eller i ett datorspel där man rör sig i en virtuell 3D-värld (t.ex. det populära Counterstrike) krävs det effektiv implementering av bl.a. rotationer och translationer. Detta utförs med hjälp av matrismultiplikationer.
  - Med metoder från den linjära algebran kan man analysera nätverk av olika slag. Matriser representerar relationer mellan objekten i nätverket. Resultat från matrisalgebran kan sedan överföras på resultat om objekten i nätverket. Som exempel kan nämnas den sociala strukturen i en grupp, planering av flygsträckor och analys av olika mönster i ett riksdagsval.
  - Om man vill konstruera t.ex. en bil ritas man en modell av bilen i en dator. Där interpoleras vissa givna punkter med glatta kurvor (s.k. splines). För att bestämma dessa kurvors matematiska former löser man linjära ekvationssystem.
  - Väderstatistik kan användas för att uppskatta sannolikheten att det snöar en viss dag beroende på om det snöade eller inte dagen innan. Mer generellt så kan man tänka sig ett system som går från ett tillstånd till ett annat med viss sannolikhet. Sådana processer - *Markovprocesser* - hanteras med hjälp av matriser.
  - Kodning används för att bl.a. felkorrigera meddelanden. Kryptering används för att säkert överföra känslig information och har blivit allt viktigare i samband med teknikutvecklingen. I båda fallen omformas data till kodad/krypterad data för att därefter återskapas till originaldata igen. Det finns många olika system som använder sig av matrismetoder för att åstadkomma detta.
  - Teorin för dynamiska system behandlar iterationer av avbildningar eller lösningar till differentialekvationer. Man får en avbildning  $T(t)$  vars linjarisering är en matris. Om det största egenvärdet till denna matris växer exponentiellt så har systemet ett kaotiskt uppförande (Exempel på dynamiska system är vårt solsystem, partiklar i en vätska/gas, elektroner i ett plasma etc.)

Nedan presenteras nu några enkla exempel där metoder från den linjära algebran används, i vissa exempel kombinerat med matematisk analys.

## 2.1 Kemisk balans

### Brinnande propangas

Kemiska ekvationer beskriver hur kvantiteter av olika ämnen produceras och konsumeras genom kemiska reaktioner. T.ex. när propangas brinner, reagerar propan ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) med syre ( $\text{O}_2$ ) och bildar då koldioxid ( $\text{CO}_2$ ) och vatten ( $\text{H}_2\text{O}$ ), enligt en ekvation som har följande form;



För att "balansera" denna ekvation måste en kemist finna positiva heltal  $x_1, \dots, x_4$  sådana att det totala antalet kol-, väte-, och syreatomer på den vänstra sidan motsvaras av ett lika stort antal på den högra sidan (eftersom inga atomer försvinner eller tillkommer genom reaktionen).

### Kemisk matematik

En systematisk metod för att balansera sådana kemiska ekvationer är att med hjälp av vektorer ställa upp en ekvation som beskriver antalet atomer av de grundämnen som förekommer i reaktionen. Eftersom den reaktion som beskrivs ovan innehåller tre olika grundämnen - kol, väte och syre - konstruerar vi för varje reagent en vektor i  $\mathbb{R}^3$  som bokför antalet atomer i varje ingående molekyl. Första elementet i vektorn ger antalet kolatomer, andra elementet ger antalet väteatomer och det tredje ger antalet syreatomer enligt följande mönster;

$$\text{C}_3\text{H}_8 : \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{O}_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{CO}_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{H}_2\text{O} : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Insättning av dessa vektorer i ekvationen ovan ger då att heltalen  $x_1, \dots, x_4$  måste uppfylla

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

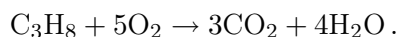
eller

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Gausselimination ger lösningarna  $x_1 = \frac{1}{4}t$ ,  $x_2 = \frac{5}{4}t$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}t$ ,  $x_4 = t$  där  $t \in \mathbb{R}$  är en parameter. Villkoret att  $x_1, \dots, x_4$  skall vara positiva heltal är uppfyllt om vi t.ex. väljer  $t = 4$ . Då blir  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 3$  och  $x_4 = 4$ . Den balanserade kemiska ekvationen blir således



*Anmärkning.* Den kemiska ekvationen blir balanserad för alla val  $t = 4n$  där  $n$  är ett positivt heltal men kemister föredrar den ekvation där koefficienterna är så små som möjligt.

## 2.2 Elektriska kretsar

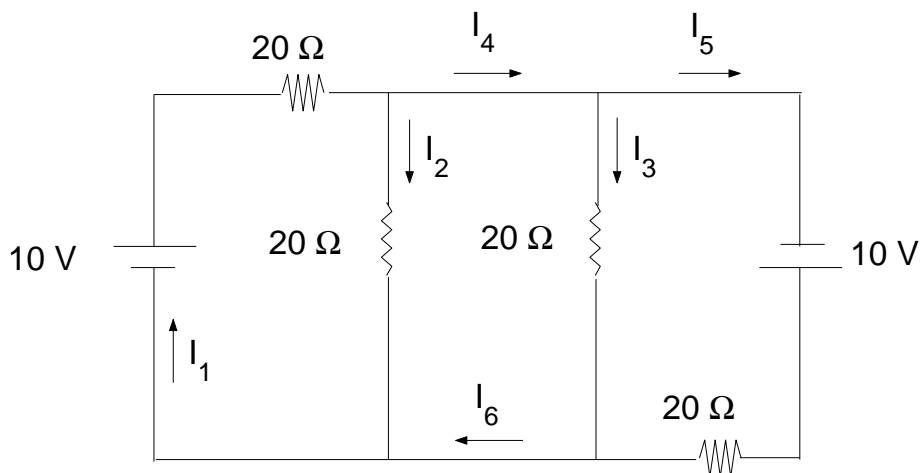
### Fysikaliska principer

Här skall vi se vad en elektrisk krets kan ha med linjära ekvationssystem att göra. Den enklaste elektriska kretsen består av spänningskällor och motstånd. Spänningskällorna (t.ex. batterier) alstrar en ström i kretsen och motstånden (t.ex. glödlampor) begränsar strömmens storlek. Strömmens flöde i en krets bestäms av tre grundläggande fysikaliska principer.

1. **Ohms lag.** Om ett motstånd i en krets har resistansen  $R$  (mäts i ohm  $\Omega$ ) så gäller sambandet  $U = RI$ , där  $U$  är spänningsfallet över motståndet (mäts i volt  $V$ ) och  $I$  är strömmen (mäts i ampere  $A$ ).
2. **Kirchoffs första lag.** Summan av ingående strömmar in i en knutpunkt är lika med summan av utgående strömmar i samma knutpunkt.
3. **Kirchoffs andra lag.** Summan av spänningsfallen i en sluten krets är alltid 0.

### På med strömmen!

Låt oss tillämpa dessa lagar för att bestämma strömmarna i kretsen nedan.



Tillämpning av Kirchoffs första lag på de fyra knutpunkterna ger ekvationerna

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_4 \\ I_4 &= I_3 + I_5 \\ I_2 + I_6 &= I_1 \\ I_3 + I_5 &= I_6 \end{aligned}$$

Vidare, så ger Kirchoffs andra lag tillsammans med Ohms lag på två slutna kretsar ekvationerna

$$20I_3 - 20I_2 = 0 \text{ och } -10 + 20I_5 - 20I_2 = 0$$

Vi kan nu sammanfatta ekvationerna ovan som det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_6 = 0 \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0 \\ 2I_1 + 2I_3 = 1 \\ -2I_2 + 2I_5 = 1 \end{cases}$$

Gausselimination ger sedan  $I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = 1/2 \text{ A}$ ,  $I_2 = I_3 = 0 \text{ A}$ .

## 2.3 Djuruppfödning

En djuruppfödare är intresserad av att veta hur många djur han kan sälja årligen utan att det påverkar hans totala djurpopulation alltför negativt. Låt oss försöka konstruera en enkel matematisk modell för detta ändamål.

Om vi antar att djuren blir könsmogna efter 1 år och reproducerar sig därefter så är det intressant att veta dels hur många ungdjur (icke könsmogna) som finns och dels hur många vuxna djur (könsmogna) som finns. Låt därför  $u_k$  och  $v_k$  beteckna antalet ungdjur resp. vuxna djur i djuruppfödarens ägo år  $k$ .

Vi antar nu att reproduktionshastigheten beskrivs av en parameter  $f$ , dvs. vi antar att från  $v_k$  vuxna djur får vi ett tillskott av  $f \cdot v_k$  ungdjur året därpå. I samma anda så antar vi vidare att av  $u_k$  ungdjur och  $v_k$  vuxna djur så avlider  $d_u \cdot u_k$  resp.  $d_v \cdot v_k$  av dessa under året. Slutligen antar vi att uppfödaren säljer en andel  $s$  av de vuxna djuren årligen, dvs. från  $v_k$  vuxna djur säljs  $s \cdot v_k$ .

Sammantaget kan vi nu skriva ned ett samband mellan populationen  $u_k, v_k$  år  $k$  och populationen  $u_{k+1}, v_{k+1}$  år  $k+1$  enligt följande.

$$\begin{cases} u_{k+1} = f v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k - d_u u_k - d_v v_k - s u_k \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} u_{k+1} = f v_k \\ v_{k+1} = (1 - d_u) u_k + (1 - d_v - s) v_k \end{cases}$$

Om vi nu definierar

$$X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & f \\ (1 - d_u) & (1 - d_v - s) \end{pmatrix}$$

så kan ekvationerna formuleras som det eleganta matrissambandet

$$X_{k+1} = AX_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Differensekvationer

Ett matrissamband av typen

$$X_{k+1} = AX_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

är ett exempel på ett dynamiskt system som har formen av en s.k. *differensekvation*. En lösning utgörs av den följd av vektorer  $X_0, X_1, X_2, \dots$  som är relaterade till varandra enligt differensekvation  $X_{k+1} = AX_k$ . Dylika differensekvationer uppträder naturligt i många linjära modeller och intressanta frågeställningar är t.ex.

1. För ett givet begynnelsestillstånd  $X_0$ , finns det en vektor  $X^*$  sådan att  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^*$ ?
2. Om vi kan visa att gränsvärdet  $X^*$  existerar, kan vi då också beräkna  $X^*$ ?
3. För ett givet begynnelsestillstånd  $X_0$ , kan vi hitta en formel som låter oss beräkna  $X_k$  uttryckt i  $X_0$ ?
4. Givet en vektor  $Y$ , kan vi bestämma  $X_0$  så att  $X_k = Y$ ?
5. Givet en vektor  $X^*$ , kan vi bestämma  $X_0$  så att  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^*$ ?

### En lösningsmetod

Om begynnelsestillståndet  $X_0$  är känt så kan man beräkna  $X_1, X_2, \dots$  enligt

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 \\ X_2 &= AX_1 = A^2 X_0 \\ X_3 &= AX_2 = A^2 X_1 = A^3 X_0 \\ &\dots \\ X_k &= A^k X_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Alltså har vi en lösningsformel  $X_k = A^k X_0$  dvs. vi har i princip besvarat fråga nummer 3 ovan. Problemet med denna formel är att vi måste beräkna (stora) potenser av en matris,  $A^k$  och det innebär mycket arbete. De övriga frågorna är också ganska komplicerade att besvara enbart med denna formel. Kan vi möjligen hitta en mer explicit formel? Ja ibland går det, t.ex. om vi antar att matrisen  $A$  är diagonaliserbar. Då kan vi skriva

$$A = SDS^{-1}$$

där  $D$  är den diagonalmatris som har egenvärdena till  $A$  som diagonalelement och  $S$  är den matris som har motsvarande egenvektorer som kolonner. Fördelen är att nu blir det enkelt att beräkna  $A^k$ ;

$$A^k = (SDS^{-1})^k = SDS^{-1}SDS^{-1} \dots SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^k S^{-1}$$

dvs. vi behöver bara kunna beräkna stora potenser av  $D$ . Men detta är enkelt eftersom  $D$  är en diagonalmatris! T.ex. om (i  $2 \times 2$ -fallet)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{så är } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Vi kan även besvara de två första frågorna nu; gränsvektorn  $X^*$  existerar om och endast om  $\lim_{k \rightarrow \infty} D^k$  existerar dvs. om och endast om  $|\lambda_1| \leq 1$  och  $|\lambda_2| \leq 1$ .

### Åter till farmen

Låt oss nu försöka använda djuruppfödarens modell till att bestämma andelen vuxna djur  $s$  som skall säljas på ett sådant sätt att populationen varken dör ut eller växer utan övre gräns. Vi antar att  $f = 0.9$ ,  $d_u = 0.1$  samt att  $d_v = 0.2$ . Då är  $X_k = A^k X_0$  där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 - s \end{pmatrix}.$$

Observera att denna matris är symmetrisk och därmed diagonaliserbar. Låt oss kalla egenvärdena till  $A$  för  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$  och samtidigt anta att  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ . Då gäller (enligt diskussionen ovan) att om  $|\lambda_1| < 1$  så kommer populationen att dö ut, dvs.

$$X_k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om  $|\lambda_1| > 1$  så medför det med ett liknande argument att

$$X_k \rightarrow \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$



dvs. populationen växer obegränsat. Alltså vill vi bestämma andelen sålda djur  $s$  så att  $|\lambda_1| = 1$ . Det karakteristiska polynomet till  $A$  ges av

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (0.8 - s)\lambda - 0.81.$$

Eftersom  $p(1) = s - 0.61$  så kan vi välja  $s = 0.61$  och därmed få  $\lambda_1 = 1$  och  $\lambda_2 = -0.81$ . Alltså kan djuruppfödaren sälja 61% av de vuxna djuren utan att populationen riskerar att dö ut eller att population växer okontrollerat. Med denna försäljningsandel kommer populationen att närma sig ett jämnviktsfördelning där det går 9 ungdjur för varje 10 vuxna djur, dvs.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} = \frac{9}{10}.$$

För att visa detta diagonaliserar vi  $A$ . Man får  $A = SDS^{-1}$  där

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.81 \end{pmatrix}.$$

Då kan vi enkelt beräkna

$$A^k = SD^k S^{-1} = \dots = \frac{1}{181} \begin{pmatrix} 81 + 100(-0.81)^k & 90 - 90(-0.81)^k \\ 90 - 90(-0.81)^k & 100 + 81(-0.81)^k \end{pmatrix}$$

så att med

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} X_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} A^k X_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} SD^k S^{-1} X_0 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{181} \begin{pmatrix} 81 + 100(-0.81)^k & 90 - 90(-0.81)^k \\ 90 - 90(-0.81)^k & 100 + 81(-0.81)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{181} \begin{pmatrix} 81 & 90 \\ 90 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{181} \begin{pmatrix} 81u_0 + 90v_0 \\ 90u_0 + 100v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alltså gäller att  $X_k \rightarrow X^*$  där

$$X^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \frac{1}{181} \begin{pmatrix} 81u_0 + 90v_0 \\ 90u_0 + 100v_0 \end{pmatrix}$$

och

$$\frac{u^*}{v^*} = \frac{81u_0 + 90v_0}{90u_0 + 100v_0} = \frac{9(9u_0 + 10v_0)}{10(9u_0 + 10v_0)} = \frac{9}{10}$$

vilket bevisar påståendet ovan.

## 2.4 Google och egenvektorer

Alla inser idag betydelsen av att ha tillgång till en bra sökmotod för att hitta websidor. När vi söker efter en websida vill vi få träffar som är relevanta för vårt sökord. Vad betyder detta? Naturligtvis måste websidan på något sätt innehålla vårt sökord men om det är många sidor som gör det, hur skall vi gradera dem? I ett tidigt skede så räknade sökmotorerna helt enkelt bara hur många gånger det aktuella sökordet förekommer, men denna metod ger ofta mycket dåliga resultat. Vi vill på något sätt kunna avgöra *hur* pass viktig en websida är. En idé är att beräkna hur många *andra* websidor som länkar till den aktuella websidan, men denna metod missar många sidor som kan vara väldigt viktiga utan att för den skull ha ett stort antal länkar till sig. En mer sofistikerad variant av denna idé används av sökmotorn Google ([www.google.se](http://www.google.se)). Google mäter graden av viktighet genom att använda ett system som kallas för PageRank och utvecklades av grundarna till Google. På googles hemsida kan man läsa att

PageRank relies on the uniquely democratic nature of the web by using its vast link structure as an indicator of an individual page's value. In essence, Google interprets a link from page A to page B as a vote, by page A, for page B. But, Google looks at more than the sheer volume of votes, or links a page receives; it also analyzes the page that casts the vote. Votes cast by pages that are themselves "important" weigh more heavily and help to make other pages "important."

Lite löst kan man alltså säga att en websida är viktig om andra viktiga websidor har länkar till den. Detta låter som en cirkeldefinition men låt oss försöka se vad denna tanke kan användas till.

### Viktade viktigheter

Antag att vi numrerar alla websidor från 1 till  $n$  och låter  $x_k$  vara ett mått på hur pass viktig websida nummer  $k$  är. Tanken med PageRank ovan är då att talet  $x_k$  är proportionellt mot summan av alla  $x_i$  sådana att sida  $i$  har en länk till sida  $k$ . Alltså har vi ett system av ekvationer som kan se ut ungefär som

$$\begin{cases} x_1 = \alpha(x_{23} + x_{341} + x_{4525}) \\ x_2 = \alpha(x_3 + x_{634} + x_{346347} + x_{8286352}) \\ \vdots \end{cases}$$

Detta är ett (gigantiskt) linjärt ekvationssystem! Låt nu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

och definiera  $A = (a_{ij})$  som den  $n \times n$ -matris som uppfyller att

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om sida } i \text{ länkar till sida } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då kan ekvationssystemet ovan skrivas som

$$X = \alpha AX$$

dvs. ekvationerna beskriver ett egenvärdesproblem! Vektorn  $X$  som vi vill ta reda på är tydligen en egenvektor till matrisen  $A$  hörande till egenvärdet  $\lambda = 1/\alpha$ . För att beräkna  $X$  kan man

ta reda på samtliga egenvektorer till  $A$  och sedan välja  $X$  som en egenvektor med enbart positiva element. Om vi har beräknat  $X$  så är det sedan lätt att rangordna websidorna i fråga om viktighet; den viktigaste websidan är den sida  $k$  som hör ihop med det största talet  $x_k$  i vektorn  $X$ . På så sätt kan Google ordna sidorna vid en sökning så att den som letar får hjälp med att rangordna sidorna och därmed sparar tid.

### Är HV bäst?

Denna idé för att rangordna objekt med hjälp av egenvektorer går tillbaka till 50-talet och har fått allt större betydelse i takt med den ökade graden av webapplikationer. Det finns dock många andra situationer där det kan vara intressant att göra en "intelligent" ranking enligt metoden ovan. Ta t.ex. en turnering där ett antal lag har mött varandra ett antal gånger. Om  $x_k$  är styrkan hos lag  $k$  och om vi antar att styrkan hos ett lag  $k$  är proportionellt mot styrkan i de lag som lag  $k$  har besegrat så återfår vi ett ekvationssystem av formen

$$X = \alpha AX$$

där  $A = (a_{ij})$  och  $a_{ij}$  är antalet gånger som lag  $i$  besegrat lag  $j$ . Låt oss ta ett litet exempel. Antag att vi har 5 lag som har kämpat i en serie där alla mött varandra två gånger - en hemmamatch och en bortamatch. Matrisen  $A$  fick då följande utseende;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Här ser vi t.ex. att lag 1 har vunnit två gånger mot lag 2 och 1 gång mot lag 5 osv. Beräkning av egenvektorerna till  $A$  ger att

$$X = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.49 \\ 0.32 \\ 0.50 \\ 0.52 \end{pmatrix}.$$

Alltså är lag 5 det lag som rankas högst och därefter följer i fallande ordning lag 4, lag 2, lag 1 och sist lag 3. Observera att både lag 5 och lag 4 vunnit lika många matcher, men lag 5 har vunnit mot starkare lag jämfört med lag 4. Likaså har lag 1 och lag 3 vunnit lika många matcher men eftersom lag 1 vann en match mot vinnaren lag 5 så rankas lag 1 högre.

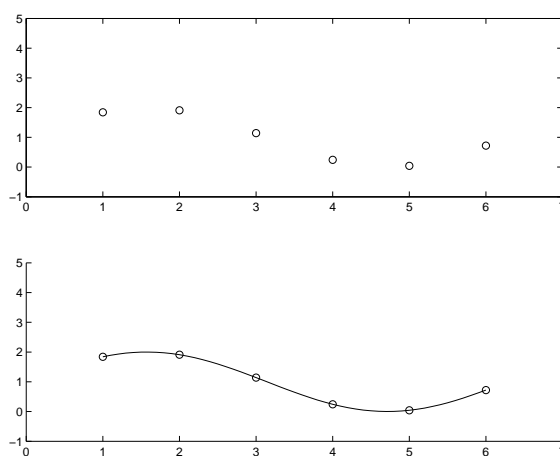
## 2.5 Designerkurvor

När en designer arbetar med ett CAD-program är en metod att ge som indata ett antal punkter, s.k. *definitions punkter* och sedan låta programmet beräkna och rita ut en kurva som "anpassar sig" till dessa definitions punkter. Om kurvan passerar genom punkterna så talar vi om en *interpolerande* kurva, och annars om en *approximerande* kurva. Problemet med att finna en interpolerande kurva kan enkelt formuleras som att givet definitions punkterna

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

vill vi finna en kurva som passerar genom samtliga  $n$  punkter.

Detta är ett klassiskt problem som är lätt att lösa; t.ex. kan man alltid finna ett polynom av grad  $n - 1$  som interpolerar dessa punkter. I praktiska sammanhang är detta sällan gångbart eftersom om  $n$  är stort så kommer kurvan som bestäms av polynomet att kraftigt oscillera mellan definitions punkterna. Istället använder man sig av en styckvis definierad kurva dvs. en kurva sammansatt av många delkurvor. Dessa delkurvor är vanligtvis polynom av relativt låg grad och varje delkurva interpolerar bara ett fåtal definitions punkter.



### Kubiska splines

Ordet *spline* är ett engelskt ord för ett rithjälpmiddel som består av en tunn, flexibel träremsa. Den används som en typ av interpolerande linjal genom att fixera den med ett antal stöd i definitions punkterna som gör det möjligt att rita en kurva som passerar genom dessa punkter. Vi vill nu skapa en matematisk motsvarighet till denna spline. Vi antar för enkelhets skull att interpolations punkterna är jämnt fördelade i  $x$ -led, dvs. vi antar att

$$x_i - x_{i-1} = h, \quad i = 1, \dots, n.$$

Låt  $y = S(x)$  vara den interpolerande kurva vi söker, definierad för  $x \in [x_1, x_n]$ . Vi vill att denna kurva skall beskriva splinelinjalens deformation, när definitions punkterna är  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Om vi ser linjalen som en punktbelastad balk så får vi enligt hållfasthetslärans ekvationer villkoret att fjärde derivatan av  $S(x)$  är noll mellan interpolations punkterna, dvs.

$$S^{(4)}(x) = 0, \quad \text{för } x \in ]x_i, x_{i-1}[, \quad i = 1, \dots, n$$

För små böjningar säger också denna hållfasthetslära att  $S(x)$  måste ha två kontinuerliga derivator, dvs.  $S(x)$ ,  $S'(x)$  och  $S''(x)$  måste vara kontinuerliga för  $x \in [x_1, x_n]$ . Det är det sista villkoret, att  $S'''(x)$  är kontinuerlig som gör att vi uppfattar kurvan som "jämn" dvs. vi uppfattar den som en hel kurva utan skarpa kanter någonstans. Matematiskt så säger man att kurvan har en kontinuerlig *krökning*. Detta är ett minikrav men det räcker långt eftersom vi klarar av att se diskontinuiteter i krökningen, dvs. i  $S'''(x)$ , men diskontinuiteter i högre ordningens derivator märker vi inte med blotta ögat.

Eftersom  $S^{(4)}(x) = 0$ , i varje delintervall  $]x_i, x_{i-1}[$  så finner vi efter fyra integrationer att  $S(x)$  måste vara ett tredjegrads polynom på varje delintervall. Härifrån kommer alltså benämningen

kubiska splines för sådana kurvor. Följaktligen kan vi skriva

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

där  $S_1(x), S_2(x), \dots, S_{n-1}(x)$  är kubiska polynom definierade på respektive delintervall.

### Beräkning av koefficienterna

Om vi (för att förenkla de kommande beräkningarna) skriver de kubiska polynomen som

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

så har vi att bestämma de  $4n - 4$  koefficienterna  $a_i, b_i, c_i, d_i$  för  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Följande villkor måste vara uppfyllda.

1.  $S(x)$  skall interpolera definitionspunkterna  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dvs.  $S(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2.  $S(x)$  är kontinuerlig på  $[x_1, x_n]$ , dvs.  $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .
3.  $S'(x)$  är kontinuerlig på  $[x_1, x_n]$ , dvs.  $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .
4.  $S''(x)$  är kontinuerlig på  $[x_1, x_n]$ , dvs.  $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .

Dessa totalt  $4n - 6$  villkor ger upphov till lika många ekvationer, alltså saknas det två ekvationer men vi återkommer till detta. Om man genomför beräkningarna så kan resultatet skrivas som

$$a_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h}$$

$$b_i = \frac{m_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{(m_{i+1} + 2m_i)h}{6}$$

$$d_i = y_i$$

för  $i = 1, \dots, n - 1$ . Här är  $h = x_i - x_{i-1}$  och vi har uttryckt koefficienterna med hjälp av kvantiteterna  $m_i = S''_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  som entydigt bestämmer våra kubiska splines. Villkoren ovan ger upphov till följande ekvationer

$$\begin{cases} m_1 + 4m_2 + m_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 \\ m_2 + 4m_3 + m_4 = 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2 \\ \vdots \\ m_{n-2} + 4m_{n-1} + m_n = 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/h^2 \end{cases}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med  $n - 2$  ekvationer och  $n$  obekanta. Precis som vi observerade tidigare så saknar vi två ekvationer för att entydigt bestämma de obekanta  $m_1, \dots, m_n$ . Skälet är helt enkelt att det finns oändligt många kubiska splines som uppfyller kraven ovan. För att välja en av dessa möjliga splines måste vi tillföra villkor i ändpunkterna  $(x_1, y_1)$  och  $(x_n, y_n)$ . Det finns många olika sätt att göra detta på, en vanlig variant är att man kräver att andraderivatorna i ändpunkterna är noll, dvs. vi sätter  $m_1 = m_n = 0$ . Detta resulterar då i det kvadratiska ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

nu skrivet på matrisform. (Fysikaliskt betyder villkoret  $m_1 = m_n = 0$  att den elastiska linjalen fritt får fortsätta i rätta linjer efter ändpunkterna).

### Ögats känslighet

Låt oss ta ett exempel. I tabellen nedan har man vid ett experiment uppmätt ögats spektrala känslighet (i enheten lm/W) för ett antal olika våglängder. För vilken våglängd är ögats känslighet som störst?

|                   |     |     |     |     |     |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Känslighet (lm/W) | 198 | 649 | 587 | 226 | 82  |
| Våglängd (nm)     | 500 | 540 | 580 | 620 | 660 |

Alltså är  $(x_1, y_1) = (500, 198), \dots, (x_5, y_5) = (660, 82)$  och  $h = x_i - x_{i-1} = 40$ . Med  $m_1 = m_5 = 0$  fås enligt ovan ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9237 \\ -1.1212 \\ 0.8137 \end{pmatrix}$$

Det följer att  $m_2 = -0.4207$ ,  $m_3 = -0.2411$  och  $m_4 = 0.2637$  så att vi kan beräkna koefficienterna till polynomen med hjälp av uttrycken ovan. Vår kubiska spline blir

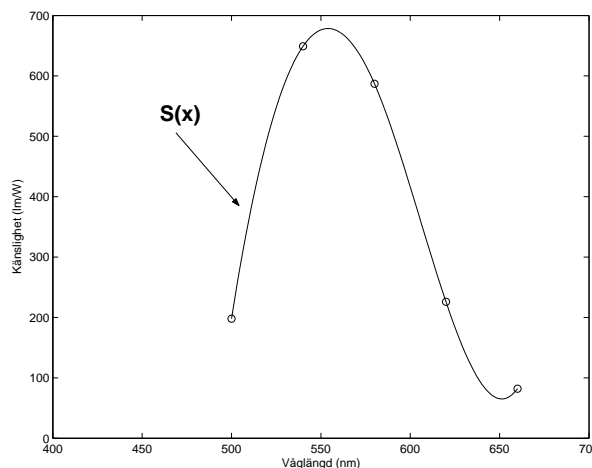
$$S(x) = \begin{cases} -0.0018(x - 500)^3 + 14.08(x - 500) + 198 & , \quad 500 \leq x \leq 540 \\ 0.0007(x - 540)^3 - 0.2103(x - 540)^2 + 5.666(x - 540) + 649 & , \quad 540 \leq x \leq 600 \\ 0.0021(x - 600)^3 - 0.1205(x - 600)^2 - 7.569(x - 600) + 587 & , \quad 600 \leq x \leq 640 \\ -0.0011(x - 640)^3 + 0.1319(x - 640)^2 - 7.116(x - 640) + 226 & , \quad 640 \leq x \leq 680 \end{cases}$$

I figuren till höger plottas mätpunkterna och vår interpolerande kurva. Vi ser att det finns ett största värde i intervallet  $[540, 600]$  och för att finna detta deriverar vi  $S(x)$  och letar efter stationära punkter. Om  $x \in [540, 600]$  så fås

$$S'(x) = 0.0021(x - 540)^2 - 0.4206(x - 540) + 5.666$$

Den rot till ekvationen  $S'(x) = 0$  som ligger i det aktuella intervallet visar sig vara  $x^* \approx 555$  nm. Ögats maximala ljuskänslighet uppnås alltså för våglängden 550 nm och då är känsligheten

$$S(x^*) \approx 689 \text{ lm/W.}$$



## 2.6 Temperaturfördelning i en metallskiva

Diskretisering av s.k. kontinuerliga system resulterar ofta i linjära ekvationssystem - vi skall här titta lite närmare på ett sådant exempel. Värmeflödet genom ett 2-dimensionellt objekt, t.ex. en tunn metallskiva, bestäms av värmeledningsekvationen

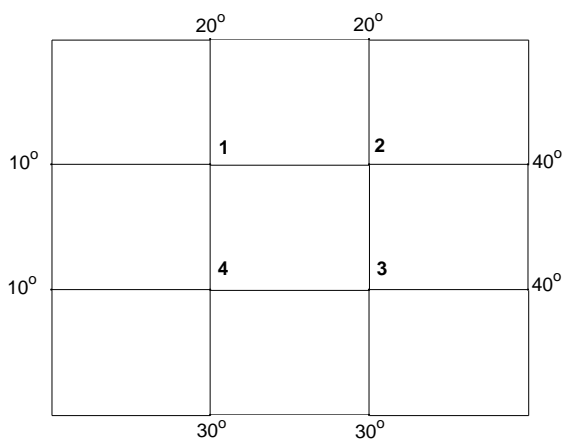
$$\mu \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Detta är en s.k. *partiell differentialekvation*; här är temperaturen  $T = T(x, y, t)$  en funktion av 3 variabler och  $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ . Parametern  $\mu$  är en värmeledningskonstant som är materialberoende och här låter vi  $\mu = 1$ . Betrakta nu en kvadratisk tunn metallskiva där vi ser till att de fyra kanternas temperaturer fixeras till  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  resp.  $40^\circ$ . Vad blir då temperaturen i en punkt  $(x, y)$  inne i skivan? Eftersom systemet strävar mot jämvikt så inträder efter en viss tid en *stationär* temperaturfördelning, dvs.  $T(x, y, t) = T(x, y)$  och värmeledningsekvationen övergår i detta jämviktssläge till  $\nabla^2 T = 0$ . Detta är en extremt viktig partiell differentialekvation som modellerar alla möjliga fysikaliska fenomen inom områden som t.ex. elektromagnetism, hydrodynamik och gravitation. Funktioner som är lösningar till denna ekvation kallas för *harmoniska funktioner*, och de uppfyller en slags medelvärdesprincip - temperaturen i en viss punkt  $T(x, y)$  måste vara lika med medelvärdet av temperaturen i omkringliggande punkter. Om detta inte vore fallet så skulle vi ha ett värmefflöde och därmed inte jämvikt. Denna egenskap kan visas matematiskt; om  $\nabla^2 T = 0$  så får man om  $h$  är ett litet tal att

$$T(x, y) \approx \frac{1}{4} (T(x-h, y) + T(x+h, y) + T(x, y-h) + T(x, y+h)).$$

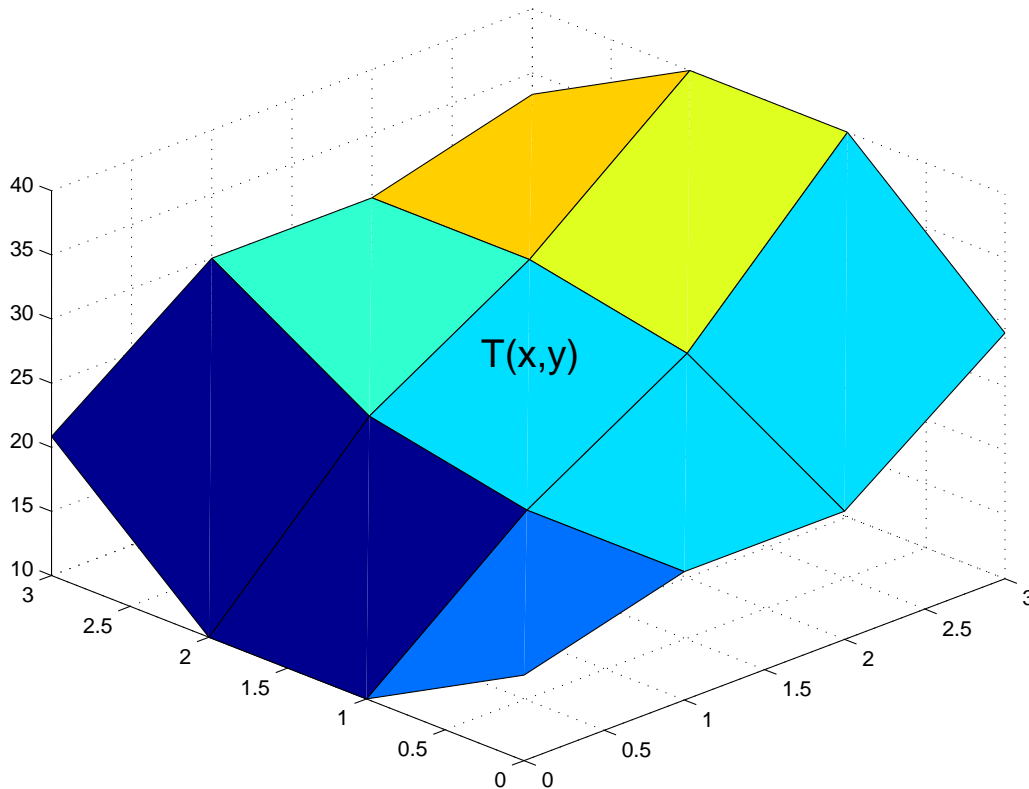
Detta säger bara att  $T(x, y)$  är ungefär lika med medelvärdet av temperaturen i de fyra närliggande punkterna  $(x-h, y)$ ,  $(x+h, y)$ ,  $(x, y-h)$  och  $(x, y+h)$ .

Låt oss nu försöka använda linjär algebra för att numeriskt ta fram värmefördelningen i metallskivan. En väldigt enkel modell av situationen visas i figuren; målet är att bestämma temperaturerna i punkterna 1 - 4; kalla dessa temperaturer för  $T_1, \dots, T_4$ . Medelvärdesprincipen ger det linjära ekvationssystemet



$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{4}(10 + 20 + T_2 + T_4) \\ T_2 = \frac{1}{4}(T_1 + 20 + 40 + T_3) \\ T_3 = \frac{1}{4}(T_4 + T_2 + 40 + 30) \\ T_4 = \frac{1}{4}(10 + T_1 + T_3 + 30) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_4 = 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 = 60 \\ -T_2 + 4T_3 - T_4 = 70 \\ -T_1 - T_3 + 4T_4 = 40 \end{cases}$$

Gausselimination ger  $T_1 = 20^\circ$ ,  $T_2 = 27.5^\circ$ ,  $T_3 = 30^\circ$ ,  $T_4 = 22.5^\circ$ . Nedan visas en plot över temperaturfördelningen i plattan.



*Anmärkning.* I praktiska sammanhang delar man förstas in området i ett väldigt finmaskigt rutnät - ekvationssystemet kan ha tusentals ekvationer och obekanta. Även för en snabb dator tar det tid att lösa sådana evationssystem - man utnyttjar därför mycket sofistikerade metoder för göra beräkningarna så snabbt som möjligt. T.ex. så kan man observera att vårt ekvationssystem ovan kan skrivas på formen  $AX = Y$  där

$$X = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix},$$

och

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att  $A$  är en symmetrisk matris med vissa diagonala "band" med nollskilda element, man säger att matrisen är *gles*. Detta kan utnyttjas när man skriver lösningsalgoritmer till ekvationen  $AX = Y$ .



## 2.7 Valmatematik

Antag att vi i ett visst land har tre partier att välja mellan när vi röstar - vi representerar partierna med färgerna blå, röd och grön. Resultatet från ett val kan vi då beskriva med en vektor

$$x = \begin{pmatrix} b \\ r \\ g \end{pmatrix}$$

där  $b$ ,  $r$ ,  $g$  är andelen som röstade på det blå, röda resp. gröna partiet. T.ex. om

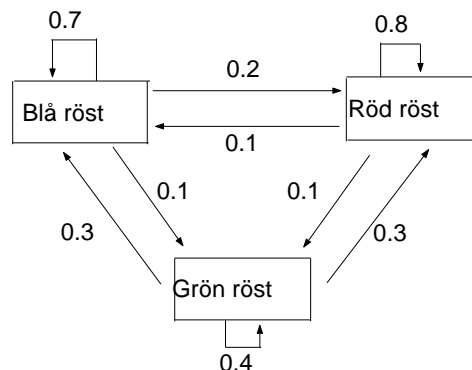
$$x = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

så betyder det att 35% röstade blått, 40% röstade rött och slutligen att 25% röstade grönt. Observera att vi här bortser från blankröster och andra mindre partier vilket får konsekvensen att  $b + r + g = 1$ . En vektor med denna egenskap kallas ibland för *sannolikhetsvektor*.

### Markovkedjor

Låt nu  $x_0, x_1, x_2, \dots$  vara resultatvektorerna från ett antal efterföljande val. En intressant fråga i detta sammanhang är om det finns något samband mellan resultatet från två intilliggande val, dvs. om vi vet  $x_k$ , säger detta någonting om  $x_{k+1}$ ?

Med avsikt att försöka besvara denna fråga så analyserar vi statistik från många tidigare val. Då visar det sig att ca. 70% av de som röstade blått i ett visst val också röstade blått i nästkommande val, 20% av dess väljare röstade däremot rött i nästkommande val medans 10% röstade grönt. Vi gör en liknande undersökning för de två andra partierna och resultatet redovisas i figuren här intill.



Med

$$x_k = \begin{pmatrix} b_k \\ r_k \\ g_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

kan vi uttrycka dessa samband som linjära ekvationer enligt

$$\begin{cases} b_{k+1} = 0.7b_k + 0.1r_k + 0.3g_k \\ r_{k+1} = 0.2b_k + 0.8r_k + 0.3g_k \\ g_{k+1} = 0.1b_k + 0.1r_k + 0.4g_k \end{cases}$$

eller med matriser  $x_{k+1} = Px_k$  där

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Observera att  $P$  är en matris vars kolonner är sannolikhetsvektorer. En sådan matris kallas för en *stokastisk* matris. Alltså har vi då en följd  $x_0, x_1, x_2, \dots$  av sannolikhetsvektorer samt en

stokastisk matris  $P$  sådan att  $x_{k+1} = Px_k$ . En sådan följd är ett exempel på vad matematiker kallar för en *Markovkedja*. T.ex. om (som ovan)

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

så får vi resultatet i nästa val till att bli

$$x_1 = Px_0 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.465 \\ 0.175 \end{pmatrix}.$$

Ytterligare ett val senare får vi resultatet

$$x_2 = Px_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.465 \\ 0.175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3510 \\ 0.4965 \\ 0.1525 \end{pmatrix}.$$

### Kan vi spå framtiden?

En intressant fråga angående Markovkedjor i allmänhet är om det går att förutsäga vad som sker långt fram i kedjan, dvs. givet  $x_0$ , hur uppför sig  $x_k$  för stora värden på  $k$ ? I vårt exempel är det alltså fråga om att analysera om vi ser en trend i väljarnas mönster - blir fördelningen av väljarna alltmer konstant? Om  $P$  är en stokastisk matris och om  $q$  är en sannolikhetsvektor sådan att  $Pq = q$  så kallas  $q$  för en *jämnviktsvektor*. Vi observerar att  $q$  svarar mot ett stationärt tillstånd för kedjan, dvs. om  $x_k = q$  för något  $k$  så är  $q = x_{k+1} = x_{k+2} = \dots$ . Observera att  $q$  är ingenting annat än en egenvektor till  $P$  hörande till egenvärdet 1.

### Jajamen!

Man kan visa att varje stokastisk matris med enbart positiva element har en entydig jämnviktsvektor  $q$ . Dessutom gäller för en godtycklig startvektor  $x_0$  att markovkedjan konvergerar mot  $q$ , dvs.  $x_k \rightarrow q$  då  $k \rightarrow \infty$ . Det spelar alltså ingen roll var vi startar någonstans, vi kommer ändå att närma oss det stationära tillståndet!

### Hur går det för våra partier?

Med hjälp av resultatet ovan kan vi nu spå hur regeringen kommer att se ut i framtiden. Vi beräknar helt enkelt jämnviktsvektorn till vår Markovkedja, dvs. den sannolikhetsvektor som är egenvektor till  $P$  med egenvärdet 1. Därför betraktar vi ekvationen  $(P - I)x = \mathbf{0}$  och vi får lösningsmängden

$$x = t \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

där  $t \neq 0$ . Följaktligen fås jämnviktsvektorn

$$q = \frac{1}{9 + 15 + 4} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/28 \\ 15/28 \\ 4/28 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.54 \\ 0.14 \end{pmatrix}.$$

Slutsatsen är därför att *oberoende* av startläge så kommer

$$x_k \rightarrow \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.54 \\ 0.14 \end{pmatrix} \text{ då } k \rightarrow \infty,$$

dvs. det verkar bli en röd regering i framtiden.

### 3 Matematisk sängbordslitteratur

Jag har hämtat inspiration, idéer, problemställningar och exempel bland annat från litteraturen nedan. Av böckerna jag har listat är flera stycken utomordentligt underhållande populärvetenskaplig litteratur som skulle lämpa sig väl både som lektyr i hängmattan och som bokval i kursen Ingenjörsmetodik. Till några av de mer lättlästa av dessa hör t.ex. [1] och [2] som båda försöker ge läsaren en överblick över matematikens fascinerande värld, i den förstnämnda med fieldsmedaljören Timothy Gowers som guide. Även [3] går att läsa (i alla fall om man bortser från vissa avsnitt) utan större kunskaper i matematik. Det är ett försök till att göra en populärvetenskaplig beskrivning av de 7 problem som går under namnet *millenniumproblemen*. Dessa problem, som fortfarande är olösta, betraktas som några av de svåraste och viktigaste inom matematikens långa historia. Förutom ära och berömmelse så kan den som löser ett av dem också inkassera en miljon dollar. Ett av problemen på listan är den s.k. *Riemannhypotesen* och om detta spännande problem och dess 150-åriga historia kan man läsa mer om i [4]. Boken [5] är mer av bussbokskaraktär, med små "vardagsproblem" beskrivna på ett mycket lättsamt sätt. Om man har läst igenom detta häfte så bör man också klara av att läsa [6] där författaren använder sig av matematik för att förklara olika typer av underhållande fenomen i naturen och vardagen. I samma genre, fast inte fullt så lättillgänglig som den sistnämnda är även [7]. Om man är intresserad av matematikens kulturhistoria så är [8] en riktig pärla där författarna tillbakablickar på 5 matematiska "expeditioner" inom olika områden av matematiken. Ett av områdena är geometrin där parallellaximoets historia behandlas utförligt, ett annat är mängdläran där man kan läsa om t.ex. kardinaltal och några berömda paradoxer. De flesta av dessa böcker finns på skolans bibliotek. Resten av böckerna i listan är mer klassisk facklitteratur, och rekommenderas till den som eventuellt vill fördjupa sig inom något område.

### Referenser

- [1] Timothy Gowers, *Mathematics, a very short introduction*, Oxford University Press, 2002
- [2] Kristin Dahl, *Den fantastiska matematiken*, Fischer & Co, 1991
- [3] Keith Devlin, *The Millennium Problems*, Basic Books, 2002
- [4] Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*, Harper Collins, 2003
- [5] Clint Brookhart, *Go Figure!*, Contemporary books, 1999
- [6] Robert B. Banks, *Towing icebergs, falling dominoes and other adventures in applied mathematics*, Princeton University Press, 1998
- [7] John A. Adam, *Modeling Patterns in the Natural World*, Princeton University Press, 2003
- [8] R. Laubenbacher & D. Pengelly *Mathematical Expeditions*, Springer, 1998
- [9] Herbert Wilf, *Searching the web with eigenvectors*, personal webpage article, [www.math.usc.utoronto](http://www.math.usc.utoronto)
- [10] H. Antaon & C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley, 2000
- [11] David C. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, Addison Wesley, 2003
- [12] Johnson et. al. , *Introduction to Linear Algebra*, Addison Wesley, 2003

- [13] James F. Epperson, *An introduction to Numerical Methods and Analysis*, John Wiley & Sons, 2001
- [14] A. A. Samarskii & A. P. Mikhailov, *Principles of Mathematical Modeling*, Taylor & Francis 2002
- [15] Robert A. Adams, *Calculus a complete course*, Addison Wesley 2003
- [16] Finney et. al., *Thomas' Calculus*, Addison Wesley 2003
- [17] James Stewart, *Calculus*, Thomson 2002
- [18] Edwards & Penney, *Calculus*, Prentice-Hall 2002
- [19] Johnson et. al., *Applied Mathematics, Body & Soul vol. 1*, Springer 2003