Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 1A

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $g(t)$ vara en deriverbar envariabelsfunktion. Visa att tvåvariabelsfunktionen $f(x,y) = g(2x - y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen
$$y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 - xyz + yz^2 - z^3 = 0$ i punkten $(1,1,1)$.

3. Inför polära koordinater i högra halvplanet $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ genom
$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \end{cases}$$
där $0 < r < \infty$ och $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Härigenom kan en funktion $f\colon H \to \mathbb{R}$ uppfattas antingen som en funktion av x och y eller som en funktion av r och ϕ. Visa att
$$r\,\frac{\partial f}{\partial r} = x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 1B

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $g(t)$ vara en deriverbar envariabelsfunktion. Visa att tvåvariabelsfunktionen $f(x, y) = g(x^2y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $(x+1)(y+2)(z+1) = 18$ i punkten $(2, 1, 1)$.

3. Inför polära koordinater i högra halvplanet $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ genom
$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \end{cases}$$
där $0 < r < \infty$ och $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Härigenom kan en funktion $f \colon H \to \mathbb{R}$ uppfattas antingen som en funktion av x och y eller som en funktion av r och ϕ. Visa att
$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2A

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 2 poäng.
- För godkänt krävs minst 3 poäng sammanlagt.

1. Bestäm *alla* stationära punkter för funktionen
$$f(x, y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2. \qquad \text{(2p)}$$

2. Bestäm karaktären för de stationära punkterna i föregående uppgift (det vill säga, lokalt maximum eller lokalt minimum eller sadelpunkt eller ...). (2p)

3. Visa först att man kan lösa ut y som funktion av x (det vill säga kan skriva $y = y(x)$) ur ekvationen
$$2y - \sin y = x,$$
nära punkten $(0, 0)$ på denna kurva. Beräkna sedan $\frac{dy}{dx}$ då $x = 0$. (2p)

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2B

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 2 poäng.
- För godkänt krävs minst 3 poäng sammanlagt.

1. Bestäm *alla* stationära punkter för funktionen
$$f(x, y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2. \qquad (2p)$$

2. Bestäm karaktären för de stationära punkterna i föregående uppgift (det vill säga, lokalt maximum eller lokalt minimum eller sadelpunkt eller ...). (2p)

3. Visa först att man kan lösa ut y som funktion av x (det vill säga kan skriva $y = y(x)$) ur ekvationen
$$x + y + \sin xy = 0,$$
nära punkten $(0, 0)$ på denna kurva. Beräkna sedan $\frac{dy}{dx}$ då $x = 0$. (2p)

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 3A

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt D vara det ändliga område i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$.
   (a) Skissera D. (1p)
   (b) Beräkna integralen
   $$I = \iint_D xy\,dxdy. \qquad (2p)$$
2. Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1 \text{ och } y \geq 0\}$. Beräkna integralen
   $$I = \iint_D y\,dxdy. \qquad (3p)$$
3. Låt $a > 0$. Beräkna arean av den del av sadelytan
   $$z = 7 - x^2 + y^2$$
   som ligger ovanför cirkelskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$. (3p)

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 3B

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt D vara det ändliga område i xy-planet som begränsas av kurvorna $x = 1$, $x = 3$, $xy = 1$ och $xy = 2$.

   (a) Skissera D. (1p)

   (b) Beräkna integralen
   $$I = \iint_D xe^{xy}\,dxdy. \qquad (2p)$$

2. Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1 \text{ och } x \geq 0\}$. Beräkna integralen
   $$I = \iint_D x\,dxdy. \qquad (3p)$$

3. Låt $a > 0$. Beräkna arean av den del av sadelytan
   $$z = 3 + x^2 - y^2$$
   som ligger ovanför cirkelskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$. (3p)

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 4A

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen
$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$
på den slutna enhetsskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Vilken är den maximala produkten av tre positiva tal med summan lika med 6? Förklara!

3. Beräkna
$$I = \int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$$
där γ är den del av enhetscirkeln som går från $(0, -1)$ till $(1, 0)$ i den fjärde kvadranten.

Lycka till!
Olle.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 4B

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm de största och minsta värdena som funktionen
$$f(x, y) = x^2 - 2x - 2y$$
antar på den slutna enhetskvadraten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1 \text{ och } 0 \leq y \leq 1\}$.

2. Vilken är den minimala summan av tre positiva tal med produkten lika med 8? Förklara!

3. Beräkna
$$I = \oint_\gamma (e^x \cos x - y)\, dx + (2xy - \arctan(y^2))\, dy,$$
där γ är den positivt orienterade randen till området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq 1\}$.

Lycka till!
Olle.